Agenzia Entrate
Ministero dell'Economia e delle Finanze

Documenti di lavoro dell'Ufficio Studi

2007/9

Proposta di metodi matematici per incrementare la produttività dell'Agenzia delle Entrate

Simone Sagratella

Documenti di lavoro dell'Ufficio Studi

2007/9

Proposta di metodi matematici per incrementare la produttività dell'Agenzia delle Entrate

Simone Sagratella

e-mail: mr.sagrax@tin.it

Luglio 2007

Proposta di metodi matematici per incrementare la produttività

Lo studio propone una metodologia finalizzata ad incrementare la produttività dell'Agenzia delle Entrate. Sono proposti un modello per massimizzare l'efficienza di tutta l'organizzazione e un sistema incentivante volto a permettere il raggiungimento degli aumenti della produttività interna all'Agenzia. In entrambi i casi il punto di partenza è la definizione di una nuova misura teorica dell'input di lavoro, che considera esclusivamente le ore lavorate necessarie dell'espletamento dell'attività produttiva.

Indice

Sintesi direzionale

Questo lavoro, risultato di uno stage effettuato presso l'Agenzia delle Entrate in collaborazione con la facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza", si prefigge di individuare metodi per incrementare la produttività dell'Agenzia. A tal fine si propone un modello per ottimizzare l'efficienza interna ed un sistema di incentivi per favorire il raggiungimento degli obiettivi produttivi desiderati.

Punto di partenza sono gli indicatori ideati dall'Ufficio Studi dell'Agenzia, che mettono in relazione i risultati ottenuti dall'Agenzia con la quantità di forza lavoro impiegata nell'ottenimento di quel livello di produzione. Dal rapporto tra l'output conseguito e le risorse impiegate si ricava, quindi, il valore della produttività.

Il passo successivo, considerato che i risultati sono controllabili solo per mezzo del tempo necessario ad ottenerli, consiste nell'esprimere l'output in funzione di quest'ultimo; di conseguenza la produttività viene a dipendere esclusivamente dal tempo impiegato, che, dunque, può essere pianificato. Per realizzare la dipendenza tra risultati e tempo si definisce una nuova misura teorica del lavoro: le ore lavorate relative esclusivamente all'espletamento dell'attività produttiva. Tale misura, rappresentando il tempo effettivamente impiegato nella produzione, attua un collegamento diretto con il risultato raggiunto.

A questo punto col primo modello si cerca la combinazione delle ore lavorate dei processi che massimizzi l'efficienza di tutta l'organizzazione e garantisca il raggiungimento dei livelli di efficacia imposti dal Ministero dell'Economia e delle Finanze o dai vertici dell'Agenzia. I risultati così ottenuti possono essere utilizzati per ridistribuire e ridimensionare le risorse tra i processi o per individuare gli obiettivi migliori da raggiungere per imporli alle Direzioni Regionali. Nel secondo modello si propone, quindi, un sistema di incentivi per conseguire tali obiettivi ottimi e se ne studiano gli effetti sulla produttività.

I sistemi illustrati, se utilizzati, miglioreranno e faciliteranno il compito dell'Ufficio Programmazione e Controllo nella definizione dei sistemi di controllo di gestione e nella programmazione aziendale.

I dati certi a cui si potrà pervenire, poiché derivanti da procedimenti scientifici, consentiranno, inoltre, l'agevole identificazione di obiettivi per il raggiungimento degli scopi prestabiliti.

Le tematiche affrontate costituiscono la base da cui iniziare ad elaborare i dati derivati dai metodi empirici di stima dei risultati, come quelli già utilizzati dall'Agenzia nel controllo di gestione.

Con lo stabilire una relazione funzionale diretta tra le ore lavorate e la produzione conseguita, é potenzialmente possibile ricondurre la determinazione dell'attività ottima dell'Agenzia delle Entrate alla soluzione di un problema di massimizzazione matematica con conseguenti vantaggi in termini di individuazione e raggiungimento di maggiori livelli di efficienza. Naturalmente, un'applicazione puntuale della metodologia dovrà necessariamente scontare il fatto che un'attività complessa e variegata come quella dell'Agenzia non può essere ricondotta ad una espressione matematica esatta; nondimeno, i vantaggi dall'applicazione del modello sarebbero, comunque,considerevoli.

1. Introduzione ([1])

Con questo lavoro si vuole impostare un sistema che colleghi il risultato prodotto dall'Agenzia con lo sforzo erogato per produrlo, al fine di aumentarne la produttività. L'analisi si inserisce nell'ambito di un progetto di ricerca, nato nel 2001 e sviluppato congiuntamente dall'US e dall'UPC ([2]). Punto di partenza sono stati risultati e metodologie, sviluppati in precedenti lavori dell'US, che hanno esaminato molte delle problematiche tipiche di una struttura come l'Agenzia delle Entrate. Infatti, nel caso dell'Agenzia, è impossibile determinare il valore dell'output semplicemente moltiplicando quantità prodotta per prezzo, poiché servizi non-market ([3]) non hanno un prezzo o non sono economicamente significativi (Griliches 1992; Jorgenson, Fraumeni 1992; Murray 1992). Inoltre, nella definizione di piani incentivanti per organizzazioni governative, come l'Agenzia, un ruolo cruciale è svolto dalla ricerca di misure delle performance (Baker 1992; Ittner, Larcker 2002).

In questo lavoro, in particolare, si intende implementare un modello matematico che, tramite una contrattazione tra il vertice dell'Agenzia e le strutture regionali, consenta di fissare un set di obiettivi che permettano di raggiungere incrementi della produttività. Parallelamente, si vuole determinare un sistema di incentivi/disincentivi mirato al raggiungimento di tali obiettivi. L'approccio seguito, per lo sviluppo di tale sistema, dovrebbe ovviare ad alcune problematiche tipiche nella determinazione di schemi incentivanti, come la necessità di fissare degli standard nelle performance (Murphy 2000) e gli effetti che questo può causare nelle organizzazioni (Holmstrom 1982).

Nella prima parte del lavoro si definiscono gli obiettivi che si intende raggiungere, espressi in termini di efficienza ed efficacia. Il modello matematico che ne deriva pone l'attenzione sul livello di efficienza raggiungibile dall'Agenzia allo scopo di massimizzarlo garantendo, al contempo, il raggiungimento di obiettivi di efficacia, previsti, ad esempio, dalla Convenzione. Si considera l'Agenzia come un insieme di processi e si fornisce, come soluzione al problema di ottimizzazione, un vettore di ore processo, intendendo con esse quella parte delle ore lavorate effettivamente dedicate all'espletamento dell'attività produttiva ([4]).

Nella seconda parte si descrivono alcune possibili applicazioni del modello. Sono individuate due diverse strategie: utilizzare direttamente il modello per stabilire degli obiettivi ottimi e definire un sistema incentivante. Tale sistema incentivante implementa un modello di tipo Principale-Agente, in cui i singoli processi dell'Agenzia sono gli Agenti da incentivare. Lo sforzo richiesto ai singoli processi è inteso come rapporto tra

---

([1]) Il lavoro rappresenta il risultato di una attività di stage condotta presso l'Agenzia delle Entrate in collaborazione con la facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Roma La Sapienza. Lo stage è stato coordinato dal dott. Salvatore Dongiovanni per l'Agenzia e dal prof. Alberto Nastasi per l'università "La Sapienza". Si ringraziano il prof. R. Convenevole, il dott. S. Pisani, il prof. S. Lucidi, il dott. G. Liuzzi e A. Taschini per i preziosi suggerimenti forniti durante la stesura del testo, la responsabilità di eventuali errori rimane comunque dell'autore.

([2]) Cutaia M.- Pisani S. (2003); Cutaia M. - Pisani S. (2004) ; Dongiovanni S. - Alborino N. (2005).

([3]) Definizione presa da: Eurostat (1996).

([4]) Si distinguono tre tipologie di ore:

a) ore lavorate ossia passate in ufficio e, quindi, osservabili dal sistema,

b) ore processo che sono solo quelle dedicate direttamente all'attività produttiva,

c) ore equivalenti, uguali cioè al numero di pezzi realizzati per il tempo unitario medio di produzione (TUM).

le ore processo e le ore di lavoro ponderate (misura delle ore effettivamente lavorate). Supposto che gli sforzi dei processi non possono essere controllati direttamente dal Principale/Agenzia, tale rapporto viene influenzato tramite la definizione di incentivi che, modificando le utilità attese dei processi, rendono gli sforzi ottimi i più vantaggiosi anche per i processi. Pertanto, si dimostrerà che, sotto opportune ipotesi sulle funzioni costitutive, un simile sistema ammette punti di equilibrio; quindi si imposterà il problema come una disequazione variazionale ([5]).

Nell'ultima parte del lavoro si stabiliscono concretamente gli indicatori di efficienza e di efficacia per tre processi dell'Agenzia, conseguentemente si genera un'istanza per il modello proposto, che, in seguito, verrà risolto con opportuni strumenti software.

In conclusione verranno proposte alcune funzioni di utilità e determinato il relativo sistema incentivante che ne può derivare. Verrà quindi individuato il punto di equilibrio del sistema.

2. Il Modello

In questa parte viene introdotto il modello matematico dal quale saranno sviluppate le metodologie di calcolo per incrementare la produttività dell'Agenzia. Inizialmente si affronta il problema di stabilire le variabili con le quali questo modello lavorerà, poi sono definite la funzione obiettivo e i vincoli.

2.1. Le ore processo come variabili del problema

Il modello matematico che si intende proporre deve rappresentare il comportamento dell'intera Agenzia. Lo scopo è determinare un criterio di ridistribuzione delle risorse (ore di lavoro) tra i processi, che permetta di raggiungere livelli di produttività maggiori di quelli attuali. L'impostazione riflette la realtà in cui opera l'Agenzia, dove le risorse umane, nel breve periodo, non sono modificabili e, pertanto, i problemi di ottimizzazione si riducono ad una riallocazione della forza lavoro.

Ai fini del calcolo occorre schematizzare il funzionamento dell'Agenzia così da avere il minimo numero di variabili che siano rappresentative del comportamento della stessa; per far questo, si è scelto di scomporre il lavoro dell'Agenzia in processi, dove la somma dei processi impegna l'intera forza lavoro dell'Agenzia ([6]).

L'US si é già occupato di determinare degli indicatori di quantità per processo adatti a quantificare il lavoro dell'Agenzia delle Entrate: come misura di input sono state definite le ore di lavoro ponderate (OLP) e come misura di output le ore equivalenti (OE) ([7]). Tuttavia, queste due grandezze, sebbene abbiano la stessa unità di misura, cioè il tempo (espresso in ore), sono concettualmente indipendenti, in quanto le OE sono una trasformazione del volume di servizi effettivamente erogati (pezzi prodotti). Tra OLP e OE esiste una relazione, al momento incognita, cosi come è raffigurato in figura 2.1.

([5]) Su C. L. - Judd K. L. (2005); Pang J. S. - Facchinei F. (2003).
([6]) Ne consegue che tutte le ore dedicate ad attività ancillari alla realizzazione dei processi sono riallocate agli stessi.
([7]) Cutaia, Pisani (2002).

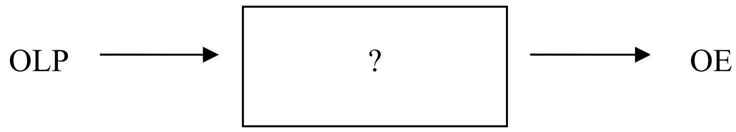


Figura 2.1: *Relazione logica tra la misura dell'input (OLP) e quella dell'output (OE) di ciascun processo.*

Per esplicitare la relazione tra OLP e OE è necessario definire una nuova misura di input, le ore processo (OP), che dovrà quantificare il lavoro effettivamente dedicato all'attività produttiva. Le OP, in seguito definite, quindi, potranno essere utilizzate, anche, per quantificare l'efficienza.

Le OLP sono una "buona" stima delle ore lavorate, in quanto pesano in maniera differente le ore prestate dalle diverse tipologie di operatori che lavorano nei processi dell'Agenzia. Le OP sfruttano lo stesso schema di ponderazione della stima delle OLP e, al contempo, la depurano della quantità di ore non dedicate all'attività produttiva. Le OP saranno quindi tutte e sole quelle ore, frazione delle OLP, che sono dedicate interamente all'attività produttiva. La difficoltà fondamentale risiede nel fatto che le OP non sono osservabili, né possono essere direttamente ricavate dalle OLP, in quanto esse sono una misura teorica che, solo dopo aver definito concretamente tutti gli obiettivi produttivi che si vorranno raggiungere, avrà una determinazione numerica.

Le OE, invece, sono una misura dell'output espresso in ore, essendo calcolate come numero di pezzi prodotti moltiplicati per il tempo unitario medio di produzione (TUM).

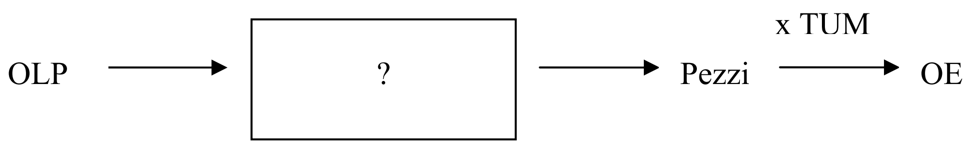


Figura 2.2: *Relazione esistente tra le ore di lavoro ponderate (OLP), i servizi offerti (pezzi), i tempi unitari medi (TUM) e le ore equivalenti (OE).*

In un sistema in cui l'input sono le OP e l'output sono i pezzi prodotti, l'output è dipendente dall'input, in quanto, le OP, come già detto prima, rappresentano tutte e sole le ore dedicate all'attività produttiva. Questa dipendenza è espressa tramite una funzione di produzione.

Figura 2.3: *Esplicazione del ruolo delle ore processo (OP) all’interno della relazione logica che lega le ore di lavoro ponderate (OLP) ed i servizi offerti (Pezzi).*

La figura 2.4 mostra la trasformazione dell’output espresso in pezzi prodotti in output espresso in OE quando l’input è rappresentato dalle OP.

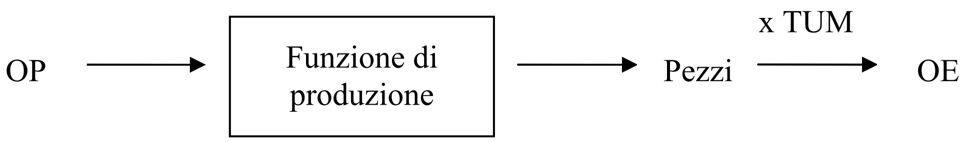


Figura 2.4: *Relazione esistente tra ore processo (OP) e le ore equivalenti (OE).*

In particolare, in un sistema in cui la funzione di produzione genera un output direttamente proporzionale all’input (cioè ad una variazione percentuale dell’input corrisponde la stessa variazione percentuale dell’output), tale funzione di produzione f(x) sarà una semplice divisione dell’input per un fattore di peso (p):

$$f(x) = x / p$$

Nell’ipotesi di attendibilità dei TUM, che, per grandi numeri, si suppone rappresentino bene il comportamento produttivo, questo fattore di peso coincide con il TUM. Le OP in ingresso avranno, in questo caso, la caratteristica di essere pari alle OE in uscita dal sistema. (Figura 2.5)

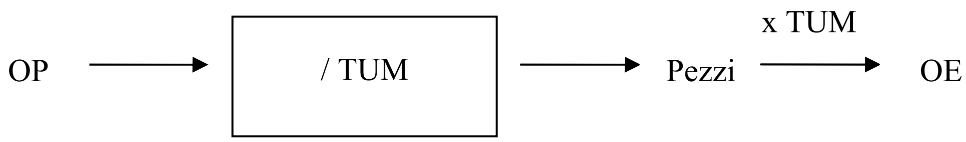


Figura 2.5: *Esplicitazione della funzione di produzione che lega le ore processo (OP) con i servizi offerti (pezzi).*

In base alla figura 2.5 la f(x) può essere riscritta nel seguente modo:

$$f(OP) = OP / TUM$$

In questo modo, un siffatto sistema non filtra le OP e non c'è, quindi, perdita o guadagno di ore.

In generale, se trasformiamo il sistema in modo tale da avere in uscita i pezzi espressi nella stessa unità di misura di OP (ore), per transitare da OP ai pezzi trasformati in ore (OP_{out} = OE) si applicherà un semplice filtro, che modifica la variabile di ingresso (OP) aggiungendo o togliendo ore in base alla struttura produttiva. Tale filtro sarà rappresentato mediante una funzione di guadagno. (Figura 2.6)

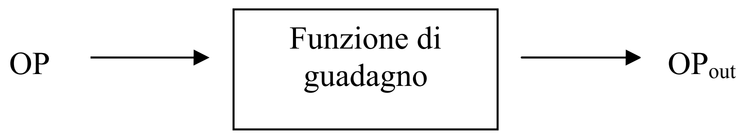


Figura 2.6: *Funzione di guadagno che lega le ore processo (OP) in ingresso con i pezzi trasformati in ore processo in uscita (OP_{out}).*

In pratica, se ogni 10 OP viene prodotto 1 pezzo e c'è proporzionalità diretta tra uscita ed entrata per mezzo del TUM, ciò è equivalente a dire che ad un'entrata di 10 OP corrispondono in uscita sempre 10 OP e, quindi, la funzione di guadagno sarà:

$$g(x) = x$$

ovvero:

$$g(OP) = OP_{out} = OP = OE$$

Infatti, TUM = 10, quindi ogni pezzo prodotto è uguale a 10 OE, e, quindi, le OP in uscita, che sono uguali alle OE prodotte, saranno pari alle OP in entrata.

Un esempio concreto facilita la comprensione dei nessi tra le grandezze sotto esame:

Un operatore y dell'Agenzia, che percepisce uno stipendio medio ([8]), entra in ufficio alle 8 ed esce alle 15, quindi OLP = 7; tuttavia in queste ore svolge attività non connesse all'attività produttiva per un totale di 1 ora, quindi OP = 6. Se y segue perfettamente il TUM, ipotizzato pari a 3 ore, e, inoltre, il sistema produttivo ha un' uscita direttamente proporzionale all'entrata, esso produrrà 2 pezzi, ovvero 6 OE.

Nella realtà è molto difficile stimare le OP partendo dalle OLP, in quanto è molto oneroso monitorare il comportamento di tutti gli operatori. Sarà invece possibile, come vedremo in seguito, ricavare le OP lavorate tramite i risultati raggiunti.

Le OP così definite saranno le variabili del modello matematico che rappresenta l'Agenzia, mentre le funzioni di guadagno saranno gli indicatori di risultato del lavoro dell'Agenzia.

2.2. L'obiettivo: massimizzare l'efficienza dell'Agenzia

Definite le variabili su cui il modello lavorerà, occorre stabilire gli obiettivi che si intendono perseguire. L'Agenzia delle Entrate, come ogni impresa, mira ad incrementare la propria efficienza interna e, tuttavia, ha anche molti altri vincoli, si pensi, a titolo esemplificativo, agli obiettivi imposti dalla Convenzione con il Ministero dell'Economia e delle Finanze (MEF), che ne condizionano le scelte strategiche e gestionali.

Tralasciando, solo per ora, tali vincoli, simuliamo il possibile comportamento di un modello che massimizza l'efficienza agendo sulle OP.

Se i processi dell'Agenzia fossero tutti rappresentati da una funzione di produzione che genera un output direttamente proporzionale all'input e, quindi, se la corrispondente funzione di guadagno fosse g(x) = x, allora un indicatore di efficienza si otterrebbe:

$$efficienza = g(OP) / (OP + Sp) = OP / (OP + Sp)$$

dove Sp = spese generali (in termini di OLP) escluso il costo del lavoro.

Nella formula si è aggiunto Sp, che indica le spese per la produzione (trasformate per renderle dimensionalmente omogenee a OLP) escluso il costo del lavoro. E' agevole ricavare che l'efficienza, in questo caso, si raggiunge banalmente contraendo Sp.

Questo risultato dipende dal fatto che la funzione di produzione è stata supposta lineare (output direttamente proporzionale all'input), caso che realmente si verifica di rado, poiché implica l'ipotesi di rendimenti costanti di scala. Nella realtà le funzioni di produzione assumono forme non lineari e, generalmente, tendono ad assumere una forma convessa, cioè con rendimenti decrescenti di scala, ovvero, con "produttività marginale decrescente" (Varian 1996, cap 17). Questa legge è valida in quanto i processi dell'Agenzia sono alimentati e condizionati da input esterni, ovvero indipendenti dalle OP, che sono mantenuti fissi nella nostra analisi ([9]). Succede quindi

([8]) Ipotizzare che y sia remunerato con uno stipendio medio è necessario per semplificare l'esposizione: in questo caso, infatti, il fattore per passare dalle ore alle ore ponderate è uguale ad uno e pertanto le due grandezze coincidono.
([9]) Consideriamo un esempio specifico: il lavoro di controllo sulle dichiarazioni è influenzato anche dal numero totale delle dichiarazioni presentate dai contribuenti; quindi, aumentando la quantità di lavoro sui controlli si avrà, sicuramente, un blocco produttivo al raggiungimento del controllo di tutte le

che, nella maggior parte dei casi, ad incrementi di input costanti corrispondano incrementi di output decrescenti. Nonostante questo, la funzione di produzione, definita come nel paragrafo precedente, avrà comunque, sempre, la forma f(x) = x / p(x) (ovvero f(OP) = OP / p(OP)), con p(OP) misura del tempo di lavorazione. La figura 2.5 può essere, quindi, rappresentata tramite la Figura 2.7.

$$\text{OP} \longrightarrow \boxed{\;/\ \text{p(OP)}\;} \longrightarrow \text{Pezzi} \xrightarrow{\text{x TUM}} \text{OE}$$

Figura 2.7*: Esplicitazione della funzione di produzione che lega le ore processo (OP) con i servizi offerti (pezzi), con l'esplicitazione della misura del tempo di lavorazione.*

Nel caso particolare della proporzionalità diretta, affrontato prima, la funzione peso p(OP) è costante, mentre nel caso generale possiamo solo definirla monotona crescente ([10]), e tale che per valori piccoli di OP sarà minore o uguale al TUM, mentre per valori alti di OP sarà maggiore o uguale al TUM ([11]).

Conseguenza di questo sulla funzione di guadagno è che:

- quando $\mathrm{p}(OP) < TUM$ allora $\mathrm{g}(OP) > OP$
- quando $\mathrm{p}(OP) = TUM$ allora $\mathrm{g}(OP) = OP$
- quando $\mathrm{p}(OP) > TUM$ allora $0 < \mathrm{g}(OP) < OP$

infatti:

$$\mathrm{g}(OP) = \mathrm{f}(OP) * TUM = OP * (TUM / \mathrm{p}(OP)).$$

L'efficienza, intesa come sopra, sarà quindi (supponendo per semplicità Sp = 0):

- > 1 quando $\mathrm{g}(OP) > OP$ (si lavora in tempi più bassi di quello medio)
- $= 1$ quando $\mathrm{g}(OP) = OP$ (si rispetta il TUM)
- < 1 quando $0 < \mathrm{g}(OP) < OP$ (si lavora in tempi superiori al TUM)

Inoltre, essendo p(OP) monotona crescente, g(OP) avrà la caratteristica di avere la derivata prima monotona decrescente:

$$\partial \mathrm{g}(a)/\partial OP \geq \partial \mathrm{g}(b)/\partial OP\ ,\quad \forall a, b \ \text{ tale che } \ 0 \leq a \leq b.$$

---

dichiarazioni e un probabile decremento della produttività marginale prima del raggiungimento di tale soglia.

([10]) Dire che una funzione è monotona crescente è equivalente a dire che è monotona non decrescente.

([11]) Questo è vero sempre, in quanto il TUM è il valore medio di p(OP) in un intervallo di interesse.

Ipotizzare che g(OP) sia monotona crescente soddisfa l'ipotesi economica di eliminazione senza costo ([12]) (Varian 1996, cap 17).

Esempi di funzioni che hanno tutte queste caratteristiche sono:

$g(OP) = c * (OP / c)^{\alpha} = c^{(1-\alpha)} * OP^{\alpha}$, con $0 < \alpha \leq 1$, $OP \geq 0$ e c tale che $p(c) = TUM$ ([13]),

e

$$g(OP) = \begin{cases} OP & \text{se} \quad 0 < OP < c, \\ g(c) & \text{se} \quad OP \geq c. \end{cases}$$

([14])

Analizziamo ora, brevemente, tre possibili generalizzazioni dei sistemi che rappresentano i processi dell'Agenzia:

1. processi in rapporto client-server;
2. processo con più di un output;
3. processo con più di un input.

È importante ricordare, in proposito, che gli unici input che vengono analizzati, in questo lavoro, sono le OP; qualunque altro input verrà mantenuto fisso e influenzerà solo la struttura delle funzioni di guadagno.

Processi in rapporto client-server

Quando due processi sono in rapporto client-server succede che l'output di un processo, identificato server, è l'input dell'altro processo, identificato client. Data la definizione delle OP in output, ne consegue che, utilizzando le funzioni di guadagno, è possibile sostituire i due processi client-server con un unico processo che avrà la funzione di guadagno composta dalle due funzioni di guadagno dei singoli processi:

siano:

$g_s(OP_s) = OP_c$ e $g_c(OP_c) = OP_{out}$

tali che

OP_s = Ore Processo server,

OP_c = Ore Processo client,

OP_{out} = Ore Processo output,

g_s = funzione guadagno server,

g_c = funzione guadagno client.

([12]) Possibilità di eliminazione senza costo (free disposal): aumentando la quantità impiegata di almeno uno degli input, dovrebbe essere possibile produrre una quantità di output almeno uguale a quella prodotta inizialmente.

([13]) Come si può facilmente notare, se α = 1 si ritorna al caso proporzionalità diretta g(OP) = OP.

([14]) c è il punto di saturazione del sistema produttivo. Notare che questa funzione ha lo svantaggio di non essere derivabile nel punto c.

Allora:

$g_{tot}(OP_s) = OP_{out} = g_c[\ g_s(OP_s)\ ]$,

con g_{tot} = funzione di guadagno totale (client-server).

Lo schema logico della formula è illustrato nella Figura 2.8.

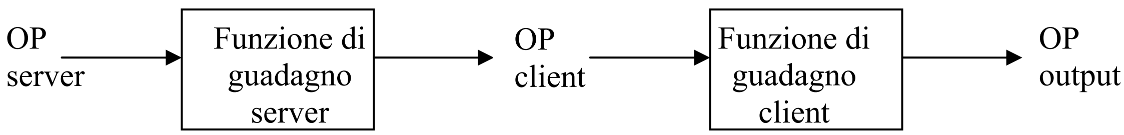


Figura 2.8: *Rappresentazione logica del passaggio dalle ore processo in input e quelle in output nel caso di un sistema con due processi client-server.*

In questo caso la variabile corrispondente alle OP del processo client si può elidere dal modello matematico e non interviene nel calcolo dell'input totale ([15]). (Figura 2.9)

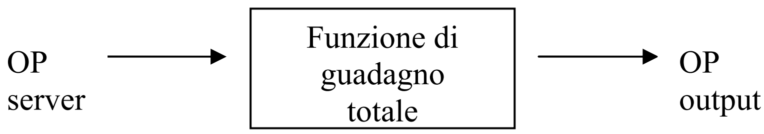


Figura 2.9: *Rappresentazione logica del passaggio dalle ore processo in input e quelle in output nel caso di un sistema con due processi client-server, ottenuta elidendo le OP client.*

Processo con più di un output

Il caso di processo con più di un output è facilmente modellabile mediante tante funzioni di guadagno quanti sono gli output del processo. Il problema sorge quando, in sede di analisi dell'efficienza, si deve rappresentare l'output totale del processo, tuttavia con opportuni coefficienti di peso sarà possibile sommare tutti gli output del processo ottenendone uno solo. In termini formali si ha:

$OP_{out} = g_{tot}(OP) = g_1(c_1 * OP) + \dots + g_m(c_m * OP)$, con $c_i \leq 1 \ \ \forall\ i = 1, \dots, m$ e $\sum_{i=1}^{m} c_i = 1$,

dove: g_{tot} è la funzione di guadagno totale del processo,

g_i è la funzione di guadagno del singolo output i,

c_i è il coefficiente di peso dell'output i rispetto all'intero processo ([16]),

([15]) Considerare le OP client nel modello sarebbe sbagliato in quanto queste sono ricavate da input già immessi nel sistema. Se si è interessati a ricavare le OP del processo client, è possibile farlo utilizzando la funzione di guadagno del processo server con le OP del processo server.

m = numero di output del processo.

Processo con più di un input

Il caso multi-input è molto più complesso, in quanto la funzione di guadagno, di questi processi, è in più variabili. Nella nostra trattazione gli input sono solo le OP, quindi parlare di processi multi-input potrebbe non avere molto senso, in quanto è più preciso definirli come processi che hanno un output in comune con altri processi ed intervengono insieme ad essi nella produzione di questo.

Quindi insiemi di processi siffatti verranno modellati con un'unica funzione di guadagno in più variabili ([17]).

Ovviamente è possibile modellare anche processi che hanno più di una particolarità, ad esempio un processo multi-output che risulti essere anche multi-input, utilizzando la metodologia esposta.

In conclusione la funzione obiettivo del modello matematico che rappresenta l'Agenzia è:

efficienza (**OP**) = $[\sum_{i=1}^{N} g_i(\mathbf{OP})] / [\mathbf{c}'\mathbf{OP} + Sp]$ ([18])

con $\mathbf{OP} \in \mathcal{R}^n$,

$Sp \in \mathcal{R}$,

$\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$, $c_j = 1$, per $j = 1, \ldots, n$,

$g_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, per $i = 1, \ldots, N$,

in cui: n = numero dei processi,

N = numero delle funzioni di guadagno del modello,

OP_j = OP processo j, per $j = 1, \ldots, n$,

Sp = spese generali dell'Agenzia (in termini di OLP) escluso il costo del lavoro,

g_i = funzione di guadagno i, per $i = 1, \ldots, N$.([19])

([16]) I coefficienti di peso potranno essere ricavati sulla base delle ore lavorate su ciascun output del processo.

([17]) Tali funzioni sono una rappresentazione dei vincoli tecnologici (Varian 1996, cap 17). Esempi semplici di tecnologia sono: proporzioni fisse, perfetti sostituti, Cobb-Douglas.

([18]) Con c' si intende il vettore trasposto. Quindi $c'x = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

([19]) Le funzioni di guadagno vengono qui intese totali, nell'accezione utilizzata nella metodologia esposta prima. L'unico caso in cui $N \neq n$ è quando ci sono più variabili che funzioni di guadagno;, in questo caso $N < n$ e non c'è più corrispondenza tra processo i e funzione di guadagno i. Un esempio è quando si è in presenza di un processo multi-input in cui almeno due di questi input non sono output di processi multi-output.

2.3. I vincoli dell'Agenzia

In questo paragrafo verrà affrontato il problema di come modellare i vincoli imposti dal MEF mediante la Convenzione e di come garantire un livello di produzione adeguato alle esigenze dello Stato ([20]).

La Convenzione è lo strumento mediante il quale sono regolati i rapporti tra Ministero dell'Economia e delle Finanze e l'Agenzia delle Entrate. In particolare, tramite la Convenzione il MEF interviene nella scelta degli obiettivi gestionali e strategici auspicabili da parte dell'Agenzia e subordina al raggiungimento di questi l'erogazione di una quota incentivante. Gli obiettivi di Convenzione sono obiettivi di efficacia; ognuno di questi ha una soglia minima, prima della quale non si raggiunge alcun punteggio, e una soglia massima, oltre la quale tale punteggio non aumenta. La somma dei punteggi dei vari obiettivi, denominato punteggio sintetico di risultato, indica la fascia di risultato raggiunta dall'Agenzia e, di conseguenza, la quota incentivante erogata dal Ministero.

Una possibile modellazione consiste nel garantire il raggiungimento della soglia minima di tutti gli obiettivi e, al contempo, l'ottenimento della massima fascia del punteggio sintetico di risultato. Quest'ipotesi si basa sull'assunto che la soglia minima di risultato di ogni obiettivo sia necessaria al fabbisogno dello Stato, e pone l'ottenimento della massima quota incentivante come primo obiettivo strategico dell'Agenzia.

Preliminarmente, bisogna convertire in OE gli obiettivi di efficacia espressi in pezzi prodotti e questo è, teoricamente, immediato in quanto è sufficiente moltiplicare il numero richiesto di pezzi prodotti per il TUM. (Appendice 3)

I vincoli del modello matematico che rappresenta l'Agenzia e riguardano la Convenzione avranno la forma:

$$\theta_i(\mathbf{OP}) / \theta^*_i \geq m_i, \text{ per } i = 1, \ldots, M,$$

$$\sum_{i=1}^{M} [(d_i / \theta^*_i)\, \theta_i(\mathbf{OP})] \geq PSR_{max}$$

$$\text{con } \theta_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}, \text{ per } i = 1, \ldots, M,$$

$$m_i \in \mathcal{R}, \text{ per } i = 1, \ldots, M,$$

$$\theta^*_i \in \mathcal{R}, \text{ per } i = 1, \ldots, M,$$

$$d_i \in \mathcal{R}, \text{ per } i = 1, \ldots, M,$$

$$PSR_{max} \in \mathcal{R},$$

in cui M = numero di indicatori di efficacia (ricavabile dalla Convenzione),

θ_i = indicatore di risultato i (ricavabile dalla Convenzione),

m_i = valore di soglia minimo dell'indicatore di risultato θ_i (ricavabile dalla Convenzione),

θ^*_i = valore atteso (in termini di OE) dell'indicatore di risultato θ_i (ricavabile dalla Convenzione),

([20]) Ovviamente possono essere agevolmente modellati altri vincoli, come quelli imposti dal budget d'esercizio.

d_i = peso dell'indicatore di efficacia θ_i / θ^*_i (ricavabile dalla Convenzione),
PSR_{max} = punteggio sintetico di risultato che garantisce l'erogazione della massime quota incentivante (ricavabile dalla Convenzione).

Per gli indicatori di risultato vale la stessa analisi, effettuata nel paragrafo 2, relativa alle funzioni di guadagno. Infatti, tali indicatori sono funzioni che hanno come variabili le OP e rappresentano il risultato in termini di OE. Inoltre, è possibile che alcuni indicatori di risultato siano uguali, o possano essere ricondotti, a funzioni di guadagno. Se questo non è realizzabile allora o si utilizzano le funzioni di guadagno dei singoli processi, modificando i valori attesi, le soglie minime e massime e i punteggi, oppure si stabiliscono tali indicatori con funzioni alternative.

È importante sottolineare che il vincolo di ottenimento del punteggio sintetico di risultato che garantisce l'erogazione della massima quota incentivante, appena esposto, non tiene conto delle soglie massime dei singoli obiettivi: questo potrebbe portare alcune istanze a non garantire, in realtà, la massima quota incentivante. In questi casi sarà necessario aggiungere dei vincoli di minorazione degli indicatori di efficacia:

$$\theta_i(\mathbf{OP}) / \theta^*_i \leq M_i, \text{ per } i \in J$$

con $M_i \in \mathcal{R}$, per $i \in$J.
Dove: J = insieme degli indici degli indicatori di efficacia per i quali è necessario il non superamento della soglia massima;
M_i = valore di soglia massimo dell'indicatore di risultato θ_i (ricavabile dalla Convenzione).

Ulteriori vincoli possono essere introdotti per assicurare una capacità produttiva minima di processi di supporto o di processi primari che non sono contemplati in Convenzione ([21]); tali vincoli saranno modellati così:

$$\varphi_i(\mathbf{OP}) \geq min_i$$

con $\varphi_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, per $i = 1, \ldots, P$,
$min_i \in \mathcal{R}$, per $i = 1, \ldots, P$.
Dove: P = numero di processi per i quali è necessaria una capacità produttiva minima,
φ_i = indicatore di risultato i,
min_i = capacità produttiva minima indicatore di risultato i (espressa in OE).

Anche per questi indicatori di risultato vale la stessa analisi delle funzioni di guadagno dei processi. Infatti, anche questi sono rappresentati da funzioni che hanno come variabili le OP e riproducono il risultato in termini di OE. In questo caso, però, è auspicabile che questi indicatori di risultato siano uguali, o possano essere ricondotti, alle corrispondenti funzioni di guadagno dei processi.

Infine, sono necessari, in base all'applicazione, altri vincoli sulle variabili, ovvero sulle OP immesse nel sistema:

([21]) I processi primari sono quelli che direttamente contribuiscono alla creazione dell'output (prodotti e servizi) di un'organizzazione; i processi di supporto sono quelli che direttamente non contribuiscono alla creazione dell'output, ma che sono necessari perché quest'ultimo sia realizzato; (Porter 1985).

$\mathbf{l} \leq \mathbf{OP} \leq \mathbf{u}$, tale che $0 \leq l_i \leq u_i$, per $i = 1, \ldots, n$ (con l_i e u_i componenti dei vettori **l** e **u**)

con $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^n$,

$\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$.

Dove: **l** = valori minimi delle OP di input dei processi,
u = valori massimi delle OP di input dei processi.

Questi ultimi, anche se tecnicamente sono vincoli di box che limitano l'insieme ammissibile del problema, sono anche ipotesi più che realistiche riguardo le ore dedicate ai processi.

3. Applicazioni

Il modello descritto nella prima parte di questo lavoro è in definitiva scrivibile, con le notazioni descritte prima, in questo modo:

$$\mathbf{max}\ [\textstyle\sum_{i=1}^{N} g_i(\mathbf{OP})] / [\mathbf{c}'\mathbf{OP} + Sp]$$

$$\mathbf{s.t.}\ \theta_i(\mathbf{OP}) / \theta^*_i \geq m_i, \text{ per } i = 1, \ldots, M$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{M} [(d_i / \theta^*_i)\ \theta_i(\mathbf{OP})] \geq PSR_{max}$$

$$\theta_i(\mathbf{OP}) / \theta^*_i \leq M_i, \text{ per } i \in J$$

$$\varphi_i(\mathbf{OP}) \geq min_i, \text{ per } i = 1, \ldots, P$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{OP} \leq \mathbf{u}$$

Esso è applicabile in vari modi nell'obiettivo di incrementare la produttività. Nell'Appendice 1 sono definite alcune proprietà sulla soluzione del modello matematico descritto sopra.

Di seguito vengono esposte due possibili strategie di utilizzo: nella prima si usano direttamente i risultati ottimi ottenuti dalla risoluzione del modello così com'è, mentre nella seconda il modello rappresenta la funzione di utilità dell'Agenzia in un modello Principale/Agente.

3.1. Determinare gli obiettivi ottimi da raggiungere

Come già esposto nei paragrafi precedenti, risolvendo il modello è possibile ottenere la quantità ottima di ore lavoro che massimizzano l'efficienza e garantiscono i livelli di efficacia voluti; viene ora affrontato il problema di utilizzare i valori raggiunti in un'ottica di gestione dell'Agenzia.

Se si dovesse progettare da zero l'intera organizzazione allora le ore ottime ottenute potrebbero essere la base da cui partire per la distribuzione e il dimensionamento delle risorse umane tra i vari processi, ma agire in tal senso all'interno dell'Agenzia non è una strada facilmente percorribile per ottenere incrementi di produttività.

Una via più semplice è quella di determinare, utilizzando il modello, gli obiettivi di output che si otterrebbero con una gestione ottima delle ore di lavoro ed imporre, poi, questi obiettivi ottimi alle Direzioni Regionali dell'Agenzia.

Gli obiettivi ottimi sono sempre intesi divisi per processo, quindi per determinarli è sufficiente utilizzare le funzioni di produzione, esposte in precedenza, con le ore processo ottime trovate risolvendo numericamente il modello. (Figura 3.1)

$$\text{OP*} \longrightarrow \boxed{\text{Funzione di produzione}} \longrightarrow \text{Output*}$$

Figura 3.1: *Individuazione obiettivi ottimi di processo.*

Siamo allora in grado di imporre ai processi degli obiettivi di efficacia che, indirettamente, dovrebbero spingere le risorse umane impiegate nei processi ad assumere una distribuzione molto vicina a quella ottima, ovvero simile a quella che si otterrebbe progettando da zero l'Agenzia sulla base delle OP ottime (OP*).

L'approccio che si può seguire per imporre alla periferia questi obiettivi di efficacia è quello di divisione regionale. In sostanza ad ogni regione si attribuisce un peso espresso in termini di popolazione ([22]), quindi si assegna ad ogni regione i un valore α_i , $0< \alpha_i< 1$, in questo modo:

$$\alpha_i = \textit{popolazione regione}_i \,/\, \textit{popolazione totale}.$$

Sia output*$_j$ l'obiettivo ottimo del processo j, si determina l'obiettivo ottimo del processo j della regione i come:

$$output^*_{ji} = \alpha_i \; output^*_j$$

Si possono effettuare varie scelte riguardo al controllo del raggiungimento degli obiettivi ottimi a livello regionale. Ad esempio, il vertice dell'Agenzia può "controllare" le Direzioni regionali tramite incentivi subordinati al raggiungimento degli obiettivi ottimi, ancorando a questi i criteri di valutazione dei Direttori regionali ([23]).

3.2. Definire un sistema incentivante per incrementare la produttività

Il metodo più adatto per raggiungere incrementi di produttività in un azienda già avviata, come l'Agenzia delle Entrate, è quello di utilizzare contratti incentivanti all'interno dell'organizzazione. Questi contratti dovranno tenere conto della capacità aziendale di controllo dei risultati ottenuti e dello sforzo richiesto per raggiungerli.

L'ottica di incentivazione che viene affrontata in questo lavoro è sempre per processi: ad un processo è assegnata una quota incentivante se esso raggiunge un certo livello di output.

([22]) Per popolazione si intende il numero dei contribuenti, che è approssimabile col numero delle dichiarazioni.
([23]) Si veda Maskin, Tirole (2004) per lo sviluppo di un modello di rielezione.

Dopo aver assegnato la quota, questa sarà ridistribuita all'interno del processo in modo appropriato, seguendo ad esempio una divisione proporzionale regionale.

Il modello che sceglieremo per simulare questa situazione è il Principale/Agente ([24]), in cui il principale è l'Agenzia e l'agente da incentivare è un processo interno. È chiaro che avremo tanti agenti quanti sono i processi dell'Agenzia. Il modello descritto in questo lavoro, però, non tiene conto dell'aleatorietà nel conseguimento dei risultati, assumendo, pertanto, che gli output siano funzione dei soli input e non di variabili aleatorie. Questa è un'assunzione che può avere significato in un modello che vede come agenti i processi dell'Agenzia e che, quindi, lavora su grandezze abbastanza consistenti per le quali i valori si avvicinano a quelli attesi.

Bisogna ora definire le funzioni di utilità del principale e degli agenti.

3.2.1. La funzione di utilità del principale

Viene costruita partendo dal modello definito nella prima parte del lavoro e modificando il numeratore della funzione obiettivo in modo che le risorse impiegate dall'Agenzia (input), tengano conto anche degli incentivi:

$$\mathrm{UP}(\mathbf{OP}) = [\textstyle\sum_{i=1}^{N} g_i(\mathbf{OP}) - (1/VOT)\,(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{inc}_i(OP_i))] \,/\, [\mathbf{c}'\mathbf{r} + Sp]$$

con $\mathrm{inc}_i : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$, per $i = 1, \ldots, n$,

$\mathbf{r}\in\mathcal{R}^n$,

$VOT\in\mathcal{R}$,

ed il resto definito come nella prima parte,

in cui inc_i = funzione incentivo processo i, ovvero quanto vale l'incentivo dato al processo i quando il lavoro è OP_j, per $i = 1, \ldots, n$,

$\mathbf{r}$ = OLP,

VOT = valore monetario del tempo.

Le variabili OP esprimono il lavoro eseguito all'interno dell'Agenzia e vanno definite in modo più accurato. Se r sono le OLP riscontrate, OP saranno sicuramente comprese tra 0_n e OLP e il livello di OP sarà decretato da una nuova quantità, lo sforzo, che è modificabile solo dagli agenti, ovvero i processi. Il lavoro, e quindi le variabili OP, saranno indicate con:

$OP_i = r_i * s_i \quad 0 \leq s_i \leq 1 \qquad i = 1, \ldots, n,$

con OP_i componenti del vettore $\mathbf{OP}$,

r_i componenti del vettore $\mathbf{r}$,

s_i componenti del vettore $\mathbf{s}$,

$\mathbf{s}\in\mathcal{R}^n$,

in cui $r_i = OLP_i$, $i = 1, \ldots, n$,

([24]) Holmstrom, Milgrom (1991).

s_i = sforzo fatto dal processo i, $i = 1, \ldots, n$.

Quindi OP è in funzione di s e quindi OP = OP(s).

Il principale, ovvero l'Agenzia, ha la possibilità di intervenire solo sugli incentivi, e quindi sulle funzioni inc_i. Per semplificare il problema ipotizziamo che queste funzioni dipendano anche da un parametro b_i definito dal principale: $inc_i(OP_i, b_i)$, tale che la derivata $\partial inc_i(OP_i, b_i) / \partial b_i \geq 0$ e la derivata $\partial inc_i(OP_i, b_i) / \partial OP_i$ sia anche funzione di b_i, e risulti $\partial[\partial inc_i(OP_i, b_i) / \partial OP_i] / \partial b_i \geq 0$, con $i = 1, \ldots, n$ ([25]).

La funzione di utilità del principale sarà in definitiva:

$$UP(\mathbf{s}, \mathbf{b}) = [\textstyle\sum_{i=1}^{N} g_i(\mathbf{OP(s)}) - (1/VOT) (\sum_{i=1}^{n} inc_i(OP_i(s_i), b_i))] / [\mathbf{c}'\mathbf{r} + Sp]$$

con $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$,

in cui **b** = parametri di incentivazione delle funzioni inc.

3.2.2. La funzione di utilità dell'agente

Le utilità degli agenti, ovvero dei processi, sono caratterizzate da derivata prima rispetto al proprio sforzo non positiva, almeno in un intervallo di interesse, e derivata prima rispetto al proprio incentivo non negativa:

$$\partial UA_i(s_i, b_i) / \partial s_i \leq 0,$$

$$\partial UA(s_i, b_i) / \partial b_i \geq 0.$$

Per semplicità indichiamo le funzioni di utilità degli agenti come:

$$UA_i(s_i, b_i) = inc_i(OP_i(s_i), b_i) - C_i(s_i) \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n,$$

con $C_i : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_+$, per $i = 1, \ldots, n$,

in cui C_i = funzione di costo dello sforzo del processo i, in termini di valore monetario.

La scelta delle funzioni C_i è molto importante ai fini dell'equilibrio finale, in quanto ognuna di esse definisce interamente la corrispondente funzione di utilità.

3.2.3. Il sistema incentivante

Il sistema così definito avrà la forma:

$$\mathbf{max}_{(b1, \ldots, bn)}\ UP(s_1, \ldots, s_n, b_1, \ldots, b_n)$$

$$\mathbf{max}_{s_i}\ UA_i(s_i, b_i) \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{s.t.}\ \theta_i(\mathbf{OP}(s_1, \ldots, s_n)) / \theta^*_i \geq m_i, \text{ per } i = 1, \ldots, M$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{M} [(d_i / \theta^*_i)\, \theta_i(\mathbf{OP}(s_1, \ldots, s_n))] \geq PSR_{max}$$

([25]) Questo è realizzabile, ad esempio, definendo un parametro b_i che moltiplica una funzione positiva di OP_i, per $i = 1, \ldots, n$.

$\theta_i(\mathbf{OP}(s_1, \ldots, s_n)) / \theta^*_i \leq M_i$, per $i \in J$

$\varphi_i(\mathbf{OP}(s_1, \ldots, s_n)) \geq min_i$, per $i = 1, \ldots, P$

$\mathbf{l} \leq \mathbf{OP}(s_1, \ldots, s_n) \leq \mathbf{u}$

$0 \leq s_i \leq 1$ per $i = 1, \ldots, n$

$b_i \in W_i$ per $i = 1, \ldots, n$

Che scritto in maniera più compatta diventa:

$\mathbf{min}_{(b1, \ldots, bn)}$ - $UP(s_1, \ldots, s_n, b_1, \ldots, b_n)$

$\mathbf{min}_{si}$ - $UA_i(s_i, b_i)$ per $i = 1, \ldots, n$

s.t. $s_i \in H_i$ per $i = 1, \ldots, n$

$b_i \in W_i$ per $i = 1, \ldots, n$

Questo sistema è un gioco che, sotto opportune condizioni sulle funzioni obiettivo e sugli insiemi ammissibili, ammette un equilibrio di Nash.

Infatti, è noto che se:

- gli insiemi H_i e W_i sono insiemi chiusi e convessi per $i = 1, \ldots, n$;
- la funzione - $UP(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n, b_1, \ldots, b_n)$ è convessa e continuamente differenziabile in b_i, $\forall$ tupla $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ fissata, per $i = 1, \ldots, n$;
- le funzioni - $UA_i(s_i, \tilde{b}_i)$ sono convesse e continuamente differenziabili in s_i, $\forall$ $\tilde{b}_i$ fissato, per $i = 1, \ldots, n$;

Allora il vettore $x = (s_1 \ldots s_n\ b_1 \ldots b_n)'$ è un equilibrio di Nash per il problema precedente se e solo se x risolve l'equazione variazionale VI(K, F) dove:

$K = \Pi_{i=1}^{n} W_i\, \Pi_{i=1}^{n} H_i$, $\quad K \subseteq \mathcal{R}^{2n}$ [26]

$F(\mathbf{x}) = (\partial(- UP(\mathbf{x})) / \partial b_1 \quad \ldots \quad \partial(- UP(\mathbf{x})) / \partial b_n \quad \partial(- UA_1(\mathbf{x})) / \partial s_1 \quad \ldots \quad \partial(- UA_n(\mathbf{x})) / \partial s_n)'$,

$F : \mathcal{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{R}^{2n}$

Inoltre, se gli insiemi H_i e W_i, per $i = 1, \ldots, n$, sono anche limitati, e quindi anche compatti, allora l'insieme delle soluzioni della VI(K, F), definita prima, è non vuoto e compatto.

Le condizioni di compattezza e convessità degli insiemi W_i, per $i = 1, \ldots, n$, sono facilmente realizzabili ponendo ad esempio i vincoli:

$\alpha_i \leq b_i \leq \beta_i$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{R}$ e $\alpha_i \leq \beta_i$ per $i = 1, \ldots, n$. [27]

([26]) Dove con Π si è indicato il prodotto cartesiano tra insiemi.

Le condizioni di compattezza degli insiemi H_i, per i = 1, …, n, sono verificabili dalla presenza dei vincoli:

$$0 \leq s_i \leq 1 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n.$$

Mentre per garantire la convessità degli insiemi H_i, per i = 1, …, n, è necessario che le funzioni $\theta_i(OP(s_1, \ldots, s_n))$ siano:

- concave in $(s_1, \ldots, s_n)'$ $\forall$ i = 1, …, M, tale che $i \notin J$ ([28]),
- lineari in $(s_1, \ldots, s_n)'$ $\forall$ i = 1, …, M, tale che $i \in J$.

E le funzioni $\varphi_i(OP(s_1, \ldots, s_n))$ siano concave $\forall$ i = 1, …, P ([29]).

In accordo con le considerazioni fatte nella prima parte del lavoro, queste condizioni risultano essere ragionevoli.

La condizione di continua differenziabilità della funzione - UP si traduce nella condizione di continua differenziabilità in b_i delle funzioni inc_i, per i = 1, …, n.

La condizione di convessità della funzione - UP è traducibile nella condizione di convessità nelle b_i, per i = 1, …, n, delle funzioni $inc_i(OP_i(s_i), b_i)$.

Le condizioni di continua differenziabilità e convessità delle funzioni - UA_i, per i = 1, …, n, sono realizzabili imponendo la continua differenziabilità in s_i delle funzioni inc_i e C_i, la concavità in s_i delle funzioni inc_i e la convessità in s_i delle funzioni C_i.

I valori di equilibrio trovati saranno i parametri b_i^* delle funzioni incentivanti $inc_i(OP_i(s_i), b_i^*)$ e gli sforzi ottimi s_i^* dovrebbero essere garantiti da tali incentivi.

Una volta stabilite le quote incentivanti spettanti a ciascun processo, queste verranno ripartite alla periferia in modo proporzionale, seguendo ad esempio i criteri esposti nel paragrafo precedente sugli obiettivi ottimi.

Un metodo risolutivo della VI(K, F) definita prima, è descritto nell'Appendice 1.

4. Realizzazione

In questa parte sono implementati i metodi descritti nelle due parti precedenti di questo lavoro. Il modello viene sviluppato solo per un sottoinsieme dei processi dell'Agenzia, quindi i risultati non hanno un interesse pratico, ma sono indicativi dello svolgimento dei vari passaggi che portano alla soluzione del problema.

4.1.Creare le funzioni di guadagno

Esaminiamo tre processi dell'Agenzia: verifiche, controlli sostanziali e contenzioso.

Dai dati relativi alla produzione e alle OLP lavorate per questi tre processi (Appendice 2) emerge come la produzione sia, quasi sempre, direttamente proporzionale alle ore

---

([27]) È importante che i valori minimi dei parametri b facciano sì che il massimo dell'utilità degli agenti sia raggiunto con sforzi maggiori o uguali ad una stima degli sforzi necessari a soddisfare i vincoli degli insiemi H.
([28]) Con l'insieme J definito come nella prima parte di questo lavoro.
([29]) Con il numero P definito come nella prima parte di questo lavoro.

lavorate. In alcuni casi, addirittura, si ha un incremento di produttività negli ultimi mesi dell'anno. Questo non è discordante con quanto esposto nella prima parte di questo lavoro, ma è un indice di come una gran parte delle OLP lavorate sia in realtà non produttiva, anche se il problema può dipendere altresì dalla consuntivazione posticipata di alcune produzioni, per cui il valore di un mese potrebbe riferirsi anche alle realizzazioni di un arco di tempo più esteso.

I dati in nostro possesso ci permettono di ricavare alcune informazioni per ogni processo:

- La massima produttività ([30]) mensile riscontrata (P_{max})
- La minima produttività mensile riscontrata (P_{min})
- Il numero delle OLP lavorate nel mese di massima produttività (OLP_{pmax})
- La produttività annuale (P)
- Il numero delle OLP lavorate nell'anno (OLP)

Proviamo allora a creare delle funzioni di guadagno con soli questi dati in nostro possesso. In caso di implementazione del metodo sarà necessario usare tecniche più raffinate di calcolo.

La prima cosa da cercare è lo sforzo medio apparente s che è stato fatto nel processo. Una possibile stima è:

$$s = (1 - k)(3/4) + k(P / P_{max})$$
$$\text{con } k = \min\{\max\{(1/4)[(P_{max} - P_{min}) / P] + (1/2), 1/2\}, 1\}$$

k è una stima dello sforzo apparente fatto dal processo quando la produttività è P_{max}, quindi k è il grado di affidabilità che P_{max} è realizzato con s = 1. La formula di s appena descritta assume che in assenza di informazioni lo sforzo medio sia uguale a ¾.

Un'implementazione delle funzioni di guadagno può essere:

$$g(OP) = c * (OP / c)^{\alpha} = c^{(1-\alpha)} * OP^{\alpha}, \text{ con } 0 < \alpha \leq 1, OP \geq 0, c \geq 0.$$

Bisogna determinare, quindi, i parametri α e c e per fare ciò abbiamo bisogno di due condizioni:

- possiamo ipotizzare che con OP = OLP si abbia una produzione, in termini di OE, superiore a quella realizzata:

  $$c * (OLP / c)^{\alpha} \geq P * OLP * TUM$$

- possiamo imporre alla nostra funzione di guadagno di passare almeno per il punto in cui con OLP_{pmax} si ha (P_{max} * OLP_{pmax} * TUM)/ k, cioè la produzione, in termini di OE, corrispondente alla produttività massima:

  $$c * (OLP_{pmax} / c)^{\alpha} \geq P_{max} * OLP_{pmax} * TUM / k$$

([30]) Intesa come Output/input, ovvero produzione/OLP.

$\Rightarrow$ $c \geq (P * OLP^{(1-\alpha)} * TUM)^{(1/(1-\alpha))} = (P * TUM)^{(1/(1-\alpha))} * OLP$,

$\alpha \geq \log_{(OLPpmax/c)} [P_{max} * OLP_{pmax} * TUM / (k * c)] = \log_e [P_{max} * OLP_{pmax} * TUM / (k * c)] / \log_e (OLP_{pmax} / c)$.

I risultati numerici e i relativi grafici sono raccolti nell'Appendice 2.

4.2. I vincoli di Convenzione

Per i tre processi in esame, solo il numero dei controlli fiscali ponderati ha senso come vincolo di convenzione. Tale vincolo impone come valore di efficacia il numero di controlli sostanziali compresa PF e adeguamento anni 2003 - 2004, controlli formali, accessi brevi e verifiche. Quindi:

$c_1^{(1-\alpha1)} * OP_1^{\alpha1} + c_2^{(1-\alpha2)} * OP_2^{\alpha2} \geq$ [15.360.000 – (valore atteso accessi brevi (in OE)) – (valore atteso controlli formali (in OE))] * (85/100) = [15.360.000 – 250.000 – 1.200.000] * (85/100) = 13.910.000 * (85/100)

Tale vincolo ha peso 20, quindi per garantirsi il massimo della quota incentivante è necessario che il punteggio sintetico di risultato relativo al solo vincolo precedente sia almeno pari a (20 / 138) * 131 = 18.98, quindi:

$20 * [c_1^{(1-\alpha1)} * OP_1^{\alpha1} + c_2^{(1-\alpha2)} * OP_2^{\alpha2}] \geq$ [15.360.000 – (valore atteso accessi brevi (in OE)) – (valore atteso controlli formali (in OE))] * (20 / 138) * 131 = [15.360.000 – 250.000 – 1.200.000] * (20 / 138) * 131 = 13.910.000 * 20 * (131/138)

$\Rightarrow c_1^{(1-\alpha1)} * OP_1^{\alpha1} + c_2^{(1-\alpha2)} * OP_2^{\alpha2} \geq 13.910.000 * (131/138) = 13.204.421$

Ma dato che 131/138 > 85/100, l'unico vincolo rimanente è l'ultimo.

4.3. Altri vincoli

Dato che in convenzione non figurano limitazioni inferiori per il prodotto del processo Contenzioso, imponiamo che questo produca una quota minima:

$c_3^{(1-\alpha3)} * OP_3^{\alpha3} \geq 2.400.000$

Imponiamo poi degli intervalli per le OP dei tre processi:

$0 \leq OP_1 \leq 4.500.000$

$0 \leq OP_2 \leq 12.000.000$

$0 \leq OP_3 \leq 4.500.000$

4.4. Il modello

Il modello risultante è:

$\mathbf{max}_{(OP1,OP2,OP3)} [c_1^{(1-\alpha1)} * OP_1^{\alpha1} + c_2^{(1-\alpha2)} * OP_2^{\alpha2} + c_3^{(1-\alpha3)} * OP_3^{\alpha3}] / [OP_1 + OP_2 + OP_3 + Sp]$

s.t. $c_1^{(1-\alpha1)} * OP_1^{\alpha1} + c_2^{(1-\alpha2)} * OP_2^{\alpha2} \geq 13.204.421$

$c_3^{(1-\alpha3)} * OP_3^{\alpha3} \geq 2.400.000$

$0 \leq OP_1 \leq 4.500.000$

$0 \leq OP_2 \leq 12.000.000$

$0 \leq OP_3 \leq 4.500.000$

Sostituendo i dati numerici trovati ([31]), diventa:

$\mathbf{max}_{(OP1,OP2,OP3)}$ $[1854 * OP_1^{0,505} + 3536 * OP_2^{0,5} + 2358 * OP_3^{0,49}] / [OP_1 + OP_2 + OP_3 + 22.431.915]$

s.t. $1854 * OP_1^{0,505} + 3536 * OP_2^{0,5} \geq 13.204.421$

$2358 * OP_3^{0,49} \geq 2.400.000$

$0 \leq OP_1 \leq 4.500.000$

$0 \leq OP_2 \leq 12.000.000$

$0 \leq OP_3 \leq 4.500.000$

E' possibile rimuovere il vincolo sul Contenzioso. Otteniamo infine il problema finale:

$\mathbf{max}_{(OP1,OP2,OP3)}$ $[1854 * OP_1^{0,505} + 3536 * OP_2^{0,5} + 2358 * OP_3^{0,49}] / [OP_1 + OP_2 + OP_3 + 22.431.915]$

s.t. $1854 * OP_1^{0,505} + 3536 * OP_2^{0,5} \geq 13.204.421$

$0 \leq OP_1 \leq 4.500.000$

$0 \leq OP_2 \leq 12.000.000$

$1.374.300 \leq OP_3 \leq 4.500.000$

Riscrivendolo in modo da avere un problema di minimizzazione e solo vincoli di minore o uguale a zero, si ha:

$\mathbf{min}_{(OP1,OP2,OP3)}$ $f(OP_1, OP_2, OP_3) = - [1854 * OP_1^{0,505} + 3536 * OP_2^{0,5} + 2358 * OP_3^{0,49}] / [OP_1 + OP_2 + OP_3 + 22.431.915]$

s.t. $- 1854 * OP_1^{0,505} - 3536 * OP_2^{0,5} + 13.204.421 \leq 0$

$OP_1 - 4.500.000 \leq 0$

$- OP_1 \leq 0$

$OP_2 - 12.000.000 \leq 0$

$- OP_2 \leq 0$

$OP_3 - 4.500.000 \leq 0$

$- OP_3 + 1.374.300 \leq 0$

4.5. Soluzione del modello

E' stato utilizzato un software (Knitro 5.1), idoneo alla soluzione di problemi di ottimizzazione continua, che utilizza AMPL ([32]).

La soluzione globale calcolata è:

([31]) Sono stati usati i dati più attuali a disposizione. Ricordiamo che questa è una simulazione senza uno scopo preciso, è solo un riferimento per una realizzazione futura.

([32]) AMPL è uno dei software di modellazione più diffusi.

$OP_1^* = 4.500.000$,

$OP_2^* = 12.000.000$,

$OP_3^* = 4.500.000$.

Notiamo che in corrispondenza di questi valori si ha un'efficienza uguale a 0,4786.

Risalendo alle OP impiegate negli anni passati (2004 e 2005) tramite le inverse delle funzioni di guadagno dei tre processi:

$g_1^{-1}(OP_1) = (\text{prodotto equivalente}_1 / 1854)^{(10/5.05)}$

$g_2^{-1}(OP_2) = (\text{prodotto equivalente}_2 / 3536)^{(10/5)}$

$g_3^{-1}(OP_3) = (\text{prodotto equivalente}_3 / 2358)^{(10/4.9)}$

$OP_{1(2004)} = 663.030$,

$OP_{2(2004)} = 3.523.900$,

$OP_{3(2004)} = 1.063.600$,

$OP_{1(2005)} = 1.774.100$,

$OP_{2(2005)} = 8.608.000$,

$OP_{3(2005)} = 1.798.100$.

In corrispondenza di questi valori si ha un'efficienza uguale a 0,3746 nel 2004 e un'efficienza uguale a 0,4555 nel 2005.

Nell'ipotesi di attendibilità delle funzioni di guadagno trovate, si avrebbe un miglioramento dell'efficienza rispetto agli anni scorsi esaminati.

Notiamo, inoltre, che la soluzione trovata corrisponde ai vincoli massimi delle OP dei tre processi; questo è sicuramente vero solo nel caso esemplificativo da noi esaminato.

4.6. Il sistema incentivante

Per prima cosa identifichiamo il vettore r delle OLP attese per l'anno dei tre processi; nel nostro caso le stimiamo a partire dai valori degli anni passati:

$r = [3.000.000, 10.000.000, 4.000.000]'$

Ora dobbiamo definire le funzioni inc. Queste devono essere convesse e continue in b e concave e continue in s; noi le ipotizziamo così:

$inc_i = b_i * (r_i * s_i)^{\gamma i}$ con $\gamma \leq 1$, per $i = 1, 2, 3$.

Scegliamo le $\gamma_i = 0,9$ per $i = 1, 2, 3$. Quindi abbiamo:

$inc_1 = b_1 * (3.000.000 * s_1)^{0,9} = 675.160 * b_1 * (s_1)^{0,9}$

$inc_2 = b_2 * (10.000.000 * s_2)^{0,9} = 1.995.300 * b_2 * (s_2)^{0,9}$

$inc_3 = b_3 * (4.000.000 * s_3)^{0,9} = 874.690 * b_3 * (s_3)^{0,9}$

La funzione UP è:

$UP = [(1854 * 1866 * s_1^{0,505} + 3536 * 3162 * s_2^{0,5} + 2358 * 1718 * s_3^{0,49}) – (1 / 19,08) * (675.160 * b_1 * (s_1)^{0,9} + 1.995.300 * b_2 * (s_2)^{0,9} + 874.690 * b_3 * (s_3)^{0,9})] / [3.000.000 + 10.000.000 + 4.000.000 + 22.431.915] =$

$[3.459.564 * s_1^{0,505} + 11.180.832 * s_2^{0,5} + 4.051.044 * s_3^{0,49} – 35.386 * b_1 * (s_1)^{0,9} – 104.580 * b_2 * (s_2)^{0,9} - 45.843 * b_3 * (s_3)^{0,9}] / 39.431.915$

Per definire le funzioni C, dobbiamo far sì che queste siano convesse e continue in s; noi le ipotizziamo così:

$C_i = v_i * s_i$ con $v_i > 1$, per $i = 1, 2, 3$.

Scegliamo le $v_i = 90.000.000$ per $i = 1, 2, 3$. Quindi abbiamo:

$C_i = 90.000.000 * s_i$ per $i = 1, 2, 3$.

Le funzioni UA sono:

$UA_1 = 675.160 * b_1 * (s_1)^{0,9} – 90.000.000 * s_1$

$UA_2 = 1.995.300 * b_2 * (s_2)^{0,9} – 90.000.000 * s_2$

$UA_3 = 874.690 * b_3 * (s_3)^{0,9} – 90.000.000 * s_3$

I vincoli del sistema per gli s sono:

$- 3.459.564 * s_1^{0,505} - 11.180.832 * s_2^{0,5} + 13.204.421 \leq 0$

$3.000.000 * s_1 - 4.500.000 \leq 0$

$- 3.000.000 * s_1 \leq 0$

$10.000.000 * s_2 - 12.000.000 \leq 0$

$- 10.000.000 * s_2 \leq 0$

$4.000.000 * s_3 - 4.500.000 \leq 0$

$- 4.000.000 * s_3 + 1.374.300 \leq 0$

$s_1 – 1 \leq 0$

$- s_1 \leq 0$

$s_2 – 1 \leq 0$

$- s_2 \leq 0$

$s_3 – 1 \leq 0$

$- s_3 \leq 0$

Per quel che riguarda i vincoli dei b, bisogna indicare dei limiti superiori e inferiori. Volendo avere come massimo valore della funzione inc_i il valore i_i:

$b_i \leq i_i / r_i^{\gamma i}$ per $i = 1, 2, 3$.

Scegliamo le $i_i = 100.000.000$ per $i = 1, 2, 3$. Quindi abbiamo:

$b_1 \leq 148$

$b_2 \leq 50$

$b_3 \leq 114$

Dobbiamo garantire che i valori minimi dei b soddisfino le richieste degli agenti per ottenere i livelli di sforzo minimi richiesti dai vincoli:

$s_1 \geq 0,815$

$s_2 \geq 0,814$

$s_3 \geq 0,344$

Operiamo così:

$\partial UA_1 / \partial s_1 = 0,9 * 675.160 * b_1 * (s_1)^{-0,1} - 90.000.000 = 0$

$\partial UA_2 / \partial s_2 = 0,9 * 1.995.300 * b_2 * (s_2)^{-0,1} - 90.000.000 = 0$

$\partial UA_3 / \partial s_3 = 0,9 * 874.690 * b_3 * (s_3)^{-0,1} - 90.000.000 = 0$

$s_1 = (0,9 * 675.160 * b_1 / 90.000.000)^{10}$

$s_1 = (0,9 * 1.995.300 * b_2 / 90.000.000)^{10}$

$s_1 = (0,9 * 874.690 * b_3 / 90.000.000)^{10}$

$(0,9 * 675.160 * b_1 / 90.000.000)^{10} \geq 0,815$

$(0,9 * 1.995.300 * b_2 / 90.000.000)^{10} \geq 0,814$

$(0,9 * 874.690 * b_3 / 90.000.000)^{10} \geq 0,344$

$b_1 \geq (0,815)^{0,1} * 90.000.000 / (0,9 * 675.160) = 145,12$

$b_2 \geq (0,814)^{0,1} * 90.000.000 / (0,9 * 1.995.300) = 49,1$

$b_3 \geq (0,344)^{0,1} * 90.000.000 / (0,9 * 874.690) = 102,76$

Quindi i vincoli del sistema sono:

$- 3.459.564 * s_1^{0,505} - 11.180.832 * s_2^{0,5} + 13.204.421 \leq 0$

$- 4.000.000 * s_3 + 1.374.300 \leq 0$

$s_1 - 1 \leq 0$

$- s_1 \leq 0$

$s_2 - 1 \leq 0$

$- s_2 \leq 0$

$s_3 - 1 \leq 0$

$b_1 - 148 \leq 0$

$- b_1 + 145,12 \leq 0$

$b_2 - 50 \leq 0$

$- b_2 + 49,1 \leq 0$

$b_3 - 114 \leq 0$

$- b_3 + 102,76 \leq 0$

Il sistema incentivante da risolvere è:

$\mathbf{min}_{(b1, \dots, bn)}$ [- 3.459.564 * $s_1^{0,505}$ - 11.180.832 * $s_2^{0,5}$ - 4.051.044 * $s_3^{0,49}$ + 35.386 * b_1 * $(s_1)^{0,9}$ + 104.580 * b_2 * $(s_2)^{0,9}$ + 45.843 * b_3 * $(s_3)^{0,9}$] / 39.431.915

$\mathbf{min}_{s1}$ - 675.160 * b_1 * $(s_1)^{0,9}$ + 90.000.000 * s_1

$\mathbf{min}_{s2}$ - 1.995.300 * b_2 * $(s_2)^{0,9}$ + 90.000.000 * s_2

$\mathbf{min}_{s3}$ - 874.690 * b_3 * $(s_3)^{0,9}$ + 90.000.000 * s_3

s.t. - 3.459.564 * $s_1^{0,505}$ - 11.180.832 * $s_2^{0,5}$ + 13.204.421 ≤ 0

- 4.000.000 * s_3 + 1.374.300 ≤ 0

$s_1 - 1 \leq 0$

$- s_1 \leq 0$

$s_2 - 1 \leq 0$

$- s_2 \leq 0$

$s_3 - 1 \leq 0$

$b_1 - 148 \leq 0$

$- b_1 + 145{,}12 \leq 0$

$b_2 - 50 \leq 0$

$- b_2 + 49{,}1 \leq 0$

$b_3 - 114 \leq 0$

$- b_3 + 102{,}76 \leq 0$

4.7. Punto di equilibrio del sistema

Bisogna risolvere la disequazione variazionale VI (K, F) tale che:

K ≡ {$b_1, b_2, b_3, s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{R}$: - 3.459.564 * $s_1^{0,505}$ - 11.180.832 * $s_2^{0,5}$ + 13.204.421 ≤ 0, - 4.000.000 * s_3 + 1.374.300 ≤ 0, $s_1 - 1 \leq 0$, $- s_1 \leq 0$, $s_2 - 1 \leq 0$, $- s_2 \leq 0$, $s_3 - 1 \leq 0$, $b_1 - 148 \leq 0$, $- b_1 + 145{,}12 \leq 0$, $b_2 - 50 \leq 0$, $- b_2 + 49{,}1 \leq 0$, $b_3 - 114 \leq 0$, $- b_3 + 102{,}76 \leq 0$}

F = [(35.386 / 39.431.915) * $(s_1)^{0,9}$

(104.580 / 39.431.915) * $(s_2)^{0,9}$

(45.843 / 39.431.915) * $(s_3)^{0,9}$

- 0,9 * 675.160 * b_1 * $(s_1)^{-0,1}$ + 90.000.000

- 0,9 * 1.995.300 * b_2 * $(s_2)^{-0,1}$ + 90.000.000

- 0,9 * 874.690 * b_3 * $(s_3)^{-0,1}$ + 90.000.000]

La soluzione è:

$s_1^* = 0{,}815342$

$s_2^* = 0{,}814511$

$s_3^* = 0{,}344178$

$b_1^* = 145{,}12$

$b_2^* = 49,1$

$b_3^* = 102,76$

5. Conclusioni

I metodi descritti in questo lavoro sono una proposta per i vertici dell'Agenzia nella definizione dei sistemi di controllo di gestione e nella gestione aziendale.

Occorre sottolineare, però, che tutti i metodi proposti utilizzano le funzioni di guadagno o, più in generale, le funzioni di produzione, quindi, se si vorrà indirizzare la ricerca verso la direzione suggerita in questo lavoro, si dovranno definire per prima cosa tali funzioni.

Come più volte ricordato, i metodi descritti forniscono dei risultati esatti, ma il lavoro di approssimazione nella definizione delle funzioni costitutive del modello e del sistema incentivante rendono i risultati imprecisi e spesso non immediatamente utilizzabili. Pertanto, sarà necessario studiare le conclusioni ricavate da metodi matematici, come quelli descritti in questo lavoro, e confrontarle con quelle ottenute con metodi empirici di stima dei risultati, come quelli già utilizzati dall'UPC nel controllo di gestione. Ad esempio, i risultati ottenuti con i metodi descritti nel testo possono essere utilizzati per confermare l'attendibilità delle decisioni strategiche prese, oppure per confutarle.

In conclusione, questo lavoro vuole essere un tentativo di utilizzare gli indicatori creati dall'US definendo un modello che possa essere utilizzato concretamente nella pianificazione e nel controllo dell'Agenzia utilizzando le potenzialità dei metodi della ricerca operativa e dell'ingegneria gestionale.

Appendice 1

A.1.1. Soluzioni del modello matematico

Il modello matematico, creato nella parte 1 di questo lavoro, si può rappresentare così:

$$\max_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}) / t(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \in K$$

Esistenza di punti di massimo:

L'insieme K, risultato dai vincoli esposti nel paragrafo 2.3, è un insieme chiuso e limitato, quindi compatto, e convesso.

La funzione f è data dalla somma di funzioni continue su K, quindi è una funzione continua su K.

La funzione t è una funzione lineare continua su K.

La funzione f / t è una funzione continua su K dato che sia f che t sono continue su K e $t(x) \neq 0$, $\forall x \in K$.

Quindi, per il teorema di Weierstrass il problema ammette un punto di massimo.

A.1.2. Convessità e concavità della funzione obiettivo del modello

Convessità della funzione $p(x) = 1 / t(x) = 1 / [\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + S]$:

$p(x)$ è convessa se e solo se $\nabla^2 p(x) \geq 0$ (semidefinita positiva).

Sia $df_i = \partial f_i(x_i) / \partial x_i$,

$\nabla p(x) = [-df_1 / (\sum_i f_i(x_i) + S)^2 \ldots -df_n / (\sum_i f_i(x_i) + S)^2]'$

Le $f_i(x_i)$ sono lineari ($f_i(x_i) = c_i * x_i$) con $c_i \geq 0$, per $i = 1, \ldots, n$,

$\nabla p(x) = [-c_1 / (\sum_i f_i(x_i) + S)^2 \ldots -c_n / (\sum_i f_i(x_i) + S)^2]'$

$$\nabla^2 p(x) = [2c_1^2 / (\textstyle\sum_i f_i(x_i) + S)^3 \ldots 2c_1c_n / (\textstyle\sum_i f_i(x_i) + S)^3,$$
$$\ldots$$
$$2c_nc_1 / (\textstyle\sum_i f_i(x_i) + S)^3 \ldots 2c_n^2 / (\textstyle\sum_i f_i(x_i) + S)^3]$$
$$= (2 / (\textstyle\sum_i f_i(x_i) + S)^3) \, [c_1^2 \ldots c_1c_n,$$
$$\ldots$$
$$c_nc_1 \ldots c_n^2]$$

che è semidefinita positiva se e solo se la matrice $C = [c_1^2 \ldots c_1c_n, \ldots, c_nc_1 \ldots c_n^2]$ è semidefinita positiva e $2 / (\sum_i f_i(x_i) + S)^3 \geq 0$. La matrice C ha tutti i minori principali non negativi con $c_i \geq 0$, per $i = 1, \ldots, n$, e quindi è semidefinita positiva, $2 / (\sum_i f_i(x_i) + S)^3 \geq 0$ per $x_i \geq 0$, per $i = 1, \ldots, n$, per costruzione.

Quindi $p(x)$ convessa per $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Convessità e concavità della funzione obiettivo $F(x) = f(x) / t(x) = f(x) * p(x)$:

La funzione obiettivo del modello, descritto nella parte 1 del lavoro, risulta quindi essere un prodotto tra una funzione concava ed una funzione convessa. Se si vorranno circoscrivere i punti stazionari di tale funzione si potrà tenere conto di tale caratteristica.

A.1.3. Soluzioni della VI(K, F)

Sia data una VI(K,F), dove F è una funzione continua su K e K è un insieme convesso definito come:

$K \equiv \{x \in \mathcal{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$

Sono vere le due seguenti affermazioni:

1. Supponiamo che x sia soluzione della VI(K,F). Se i vincoli sono regolari ([33]) in x, allora esistono dei moltiplicatori $\mu \in \mathcal{R}^l$ e $\lambda \in \mathcal{R}^m$ tali che:

   $$0 = F(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

   $$0 = h(x)$$

   $$0 \leq \lambda \perp g(x) \leq 0$$

2. Viceversa, se (x, μ, λ) soddisfa le condizioni appena scritte (condizioni KKT), allora x è una souzione della VI(K, F).

Nel caso del nostro problema l'insieme K è così definito:

$$- \theta_i(OP(s_1, \ldots, s_n)) / \theta^*_i + m_i \leq 0, \text{ per } i = 1, \ldots, M$$

$$- \{\sum_{i=1}^{M} [(d_i / \theta^*_i)\ \theta_i(OP(s_1, \ldots, s_n))]\} + PSR_{max} \leq 0$$

$$\theta_i(OP(s_1, \ldots, s_n)) / \theta^*_i - M_i \leq 0, \text{ per } i \in J$$

$$- \varphi_i(OP(s_1, \ldots, s_n)) + min_i \leq 0, \text{ per } i = 1, \ldots, P$$

$$OP(s_1, \ldots, s_n) - U \leq 0$$

$$- OP(s_1, \ldots, s_n) + L \leq 0$$

$$s_i - 1 \leq 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$- s_i \leq 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$b_i - \beta_i \leq 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$- b_i + \alpha_i \leq 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

Sia ora $\Phi_{FB}(a, b) = (a^2 + b^2)^{(1/2)} - (a + b)$ con $a, b \in \mathcal{R}^n$ la funzione di Fischer-Burmeister.

([33]) Dire che i vincoli di un problema di ottimizzazione sono regolari in un punto vuol dire che si assume che i vincoli soddisfino una delle molte possibili condizioni di regolarità. Due delle più comuni sono: (a) la lineare indipendenza dei gradienti dei vincoli di uguaglianza e dei vincoli attivi di disuguaglianza e (b) il fatto che tutti i vincoli siano lineari.

È noto che si possono riscrivere le condizioni KKT nel seguente modo:

$0 = [L(x, \mu, \lambda)$

$h(x)$

$\Phi_{FB}(- g_1(x), \lambda_1)$

…

$\Phi_{FB} (- g_m(x), \lambda_m)]$

con $L(x, \mu, \lambda) = F(x) + \nabla h(x)'\mu + \nabla g(x)'\lambda$

Abbiamo così ricondotto la soluzione di una VI alla soluzione di un sistema di equazioni.

Appendice 2

Ore lavorate 2004

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004
309300 – Verifiche	146.819	155.298	143.276	121.948	1.435.133
309400 - Controlli sostanziali	536.972	535.381	565.532	562.600	5.183.932
310F00 – Contenzioso	300.758	304.189	288.903	258.980	3.327.725

Ore lavorate 2005

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2005
309300 – Verifiche	177.990	172.729	181.489	134.563	2.383.609
309400 - Controlli sostanziali	901.141	948.375	964.736	832.500	8.927.073
310F00 – Contenzioso	305.749	301.606	294.923	243.455	3.405.407

Ore lavorate ponderate 2004

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004
309300 – Verifiche	149.812	157.932	145.803	124.234	1.468.304
309400 - Controlli sostanziali	531.164	529.334	559.487	555.136	5.114.388
310F00 – Contenzioso	296.920	299.549	284.032	255.856	3.277.305

Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004
890.523	1.040.335	1.198.267	1.344.070	1.468.304
2.939.268	3.470.432	3.999.765	4.559.252	5.114.388
2.140.948	2.437.868	2.737.418	3.021.449	3.277.305

Ore lavorate ponderate 2005

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2005	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2005
309300 – Verifiche	181.963	175.584	184.351	136.258	2.420.334	1.742.177	1.924.140	2.099.724	2.284.076	2.420.334
309400 - Controlli sostanziali	886.696	932.833	949.321	819.661	8.756.442	5.167.930	6.054.626	6.987.459	7.936.780	8.756.442
310F00 – Contenzioso	301.195	297.796	292.104	241.919	3.359.473	2.226.458	2.527.653	2.825.449	3.117.554	3.359.473

Produzione equivalente 2004

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004	TUM	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004
309300 – Verifiche	150.305	175.520	125.852	290.925	1.614.305	1,0	871.704	1.022.009	1.197.528	1.323.380	1.614.305
309400 - Controlli sostanziali	520.136	559.136	735.150	2.075.425	6.637.826	1,0	2.747.978	3.268.114	3.827.251	4.562.401	6.637.826
310F00 – Contenzioso	355.235	256.967	220.300	349.077	2.116.767	4,5	935.188	1.290.423	1.547.390	1.767.690	2.116.767

Produzione equivalente 2005

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2005	TUM	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2005
309300 – Verifiche	155.013	168.394	234.727	272.581	2.653.638	1,0	1.822.924	1.977.937	2.146.331	2.381.058	2.653.638
309400 - Controlli sostanziali	973.340	1.047.519	1.537.438	2.374.243	10.374.432	1,0	4.441.892	5.415.233	6.462.752	8.000.190	10.374.432
310F00 – Contenzioso	191.743	266.588	308.609	241.775	2.737.787	4,5	1.729.072	1.920.816	2.187.403	2.496.012	2.737.787

Produttività 2004

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004
309300 – Verifiche	1,0032883	1,1113643	0,8631627	2,3417551	1,09943514
309400 - Controlli sostanziali	0,9792388	1,0563026	1,3139704	3,7385889	1,29787286
310F00 – Contenzioso	0,2658671	0,1906323	0,1723595	0,3031887	0,14353031

Produttività 2005

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 2004
309300 – Verifiche	0,8518898	0,9590501	1,2732568	2,0004766	1,09639358
309400 - Controlli sostanziali	1,0977162	1,1229432	1,6195136	2,8966139	1,18477722
310F00 – Contenzioso	0,1414686	0,198934	0,2347781	0,2220899	0,18109899

Dati statistici

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Pmax	Pmin	P	k	s	TUM	c = OLP	OLPpmax	α	c^(1 - α)
309300 – Verifiche	2,3417551	0,8518898	1,2600072	0,7956065	0,58138001	1,0	4.000.000	124.234	0,505	1.853,616
309400 - Controlli sostanziali	3,7385889	0,9792388	1,6307538	0,9230176	0,46035246	1,0	12.500.000	555.136	0,5	3.535,534
310F00 – Contenzioso	0,3031887	0,1414686	0,2053947	0,6968406	0,69944325	4,5	4.100.000	255.856	0,49	2.357,87

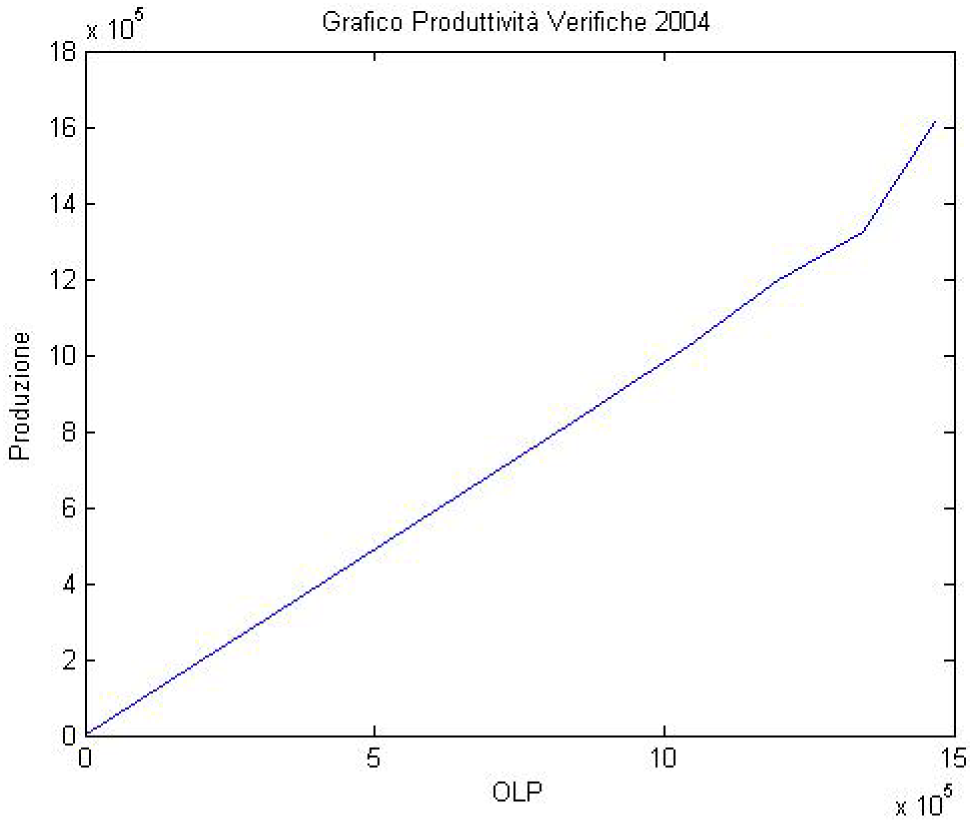
Costi al netto del lavoro	VOT
1.495.461.000	19,08
Sp totali	**P processi**
78378459,12	28,62
Sp verif. contr. conten.	
22431915	

Anno 2004

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Ore ponderate	Peso %
309300 - Verifiche	1.468.304	2,94%
309400 - Controlli sostanziali	5.114.388	10,24%
310F00 - Contenzioso	3.277.305	6,56%
Totale Agenzia	**49.935.235**	**100,00%**

Anno 2005

Processi prevenzione e contrasto all'evasione	Ore ponderate	Peso %
309300 - Verifiche	2.420.334	4,77%
309400 - Controlli sostanziali	8.756.442	17,24%
310F00 - Contenzioso	3.359.473	6,61%
Totale Agenzia	**50.793.400**	**100,00%**



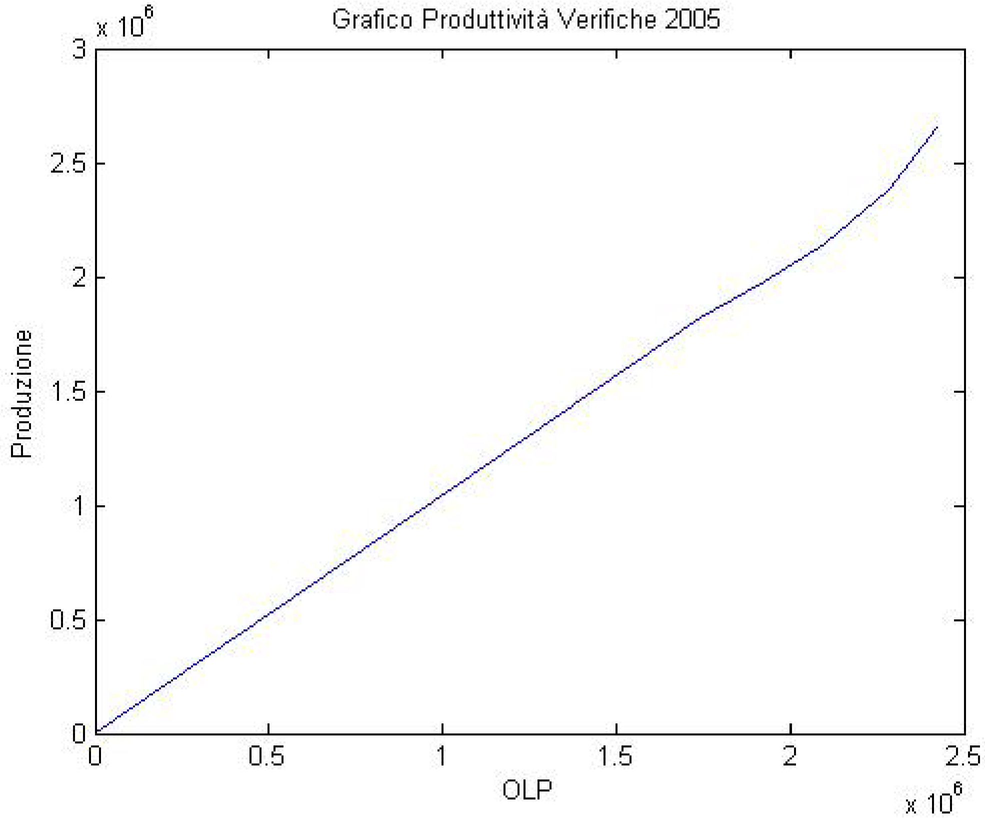


Grafico Produttività Verifiche 2005
x 10^6
Produzione
OLP
x 10^6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

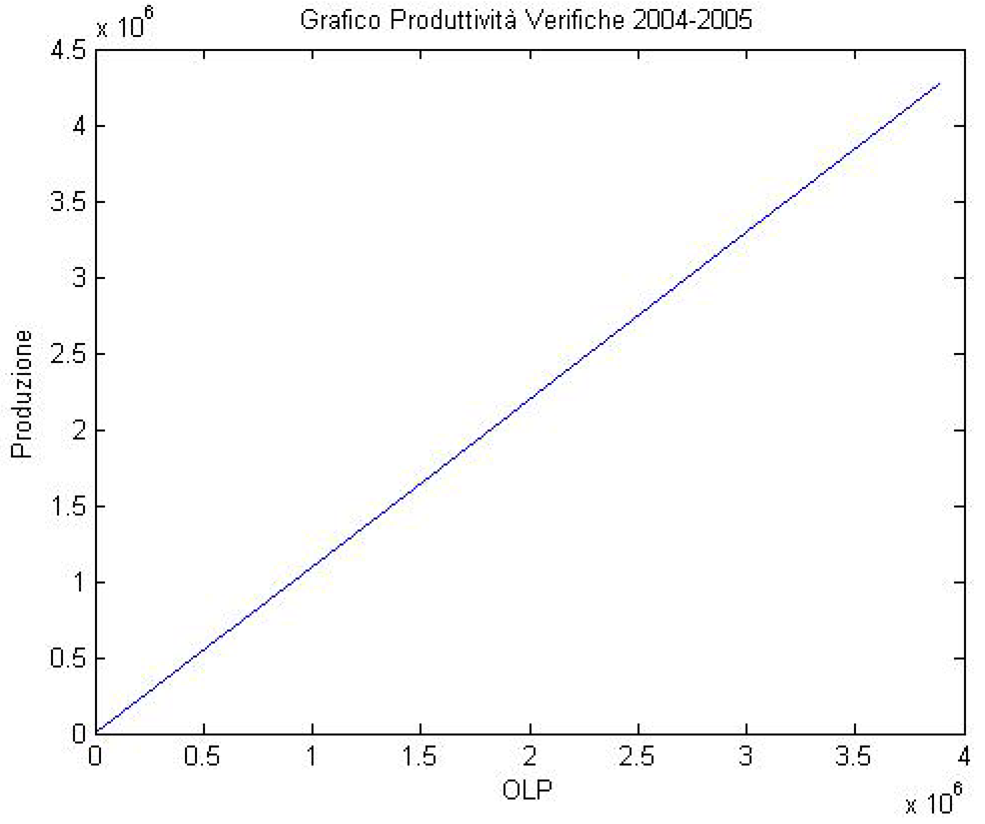


Grafico Produttività Verifiche 2004-2005
x 10^6
Produzione
OLP
x 10^6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

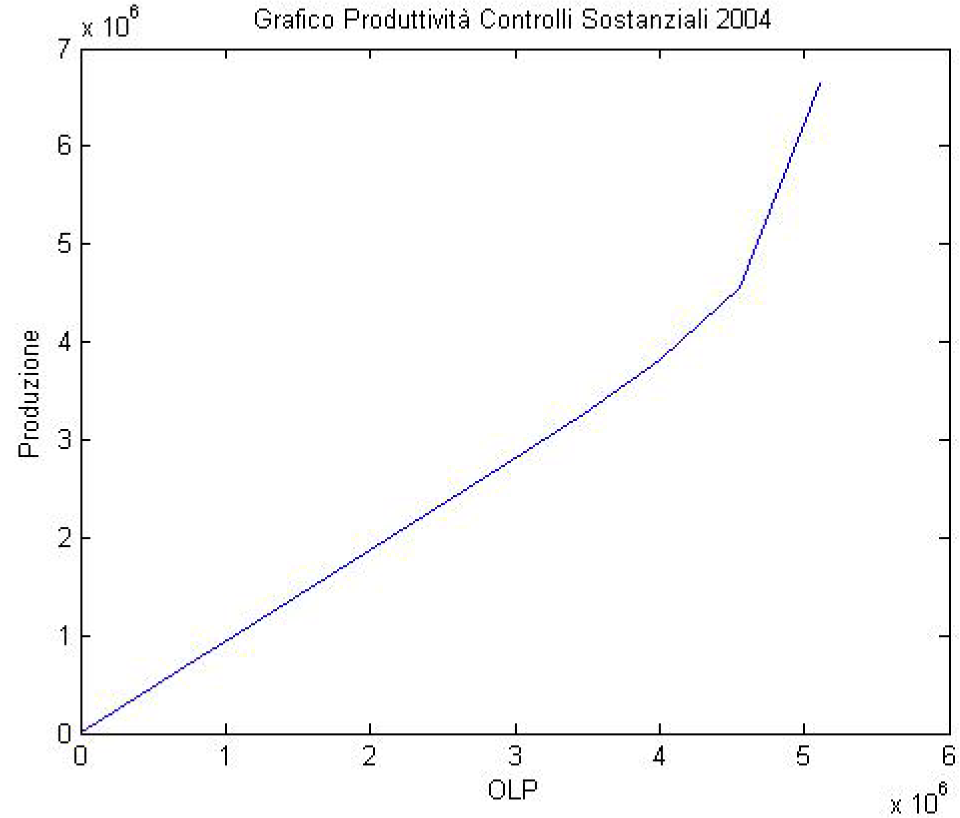


Grafico Produttività Controlli Sostanziali 2004
x 10^6
7
6
5
4
3
2
1
0
Produzione
0
1
2
3
4
5
6
OLP
x 10^6

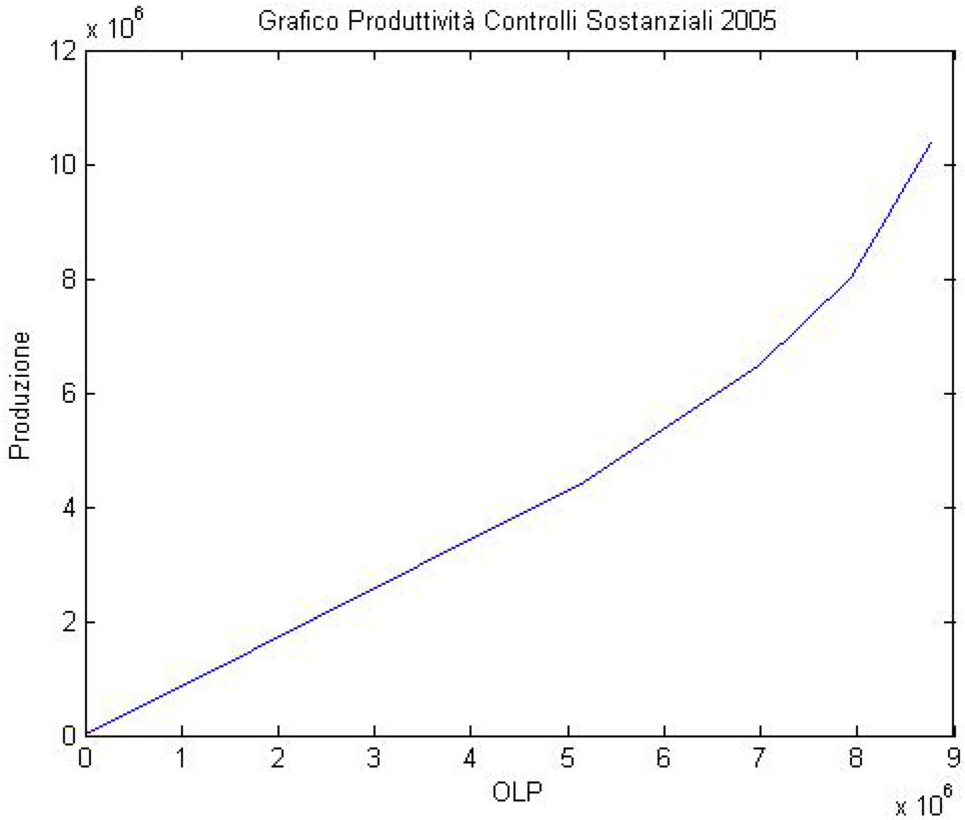


Grafico Produttività Controlli Sostanziali 2005
x 10^6
12
10
8
6
4
2
0
Produzione
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
OLP
x 10^6

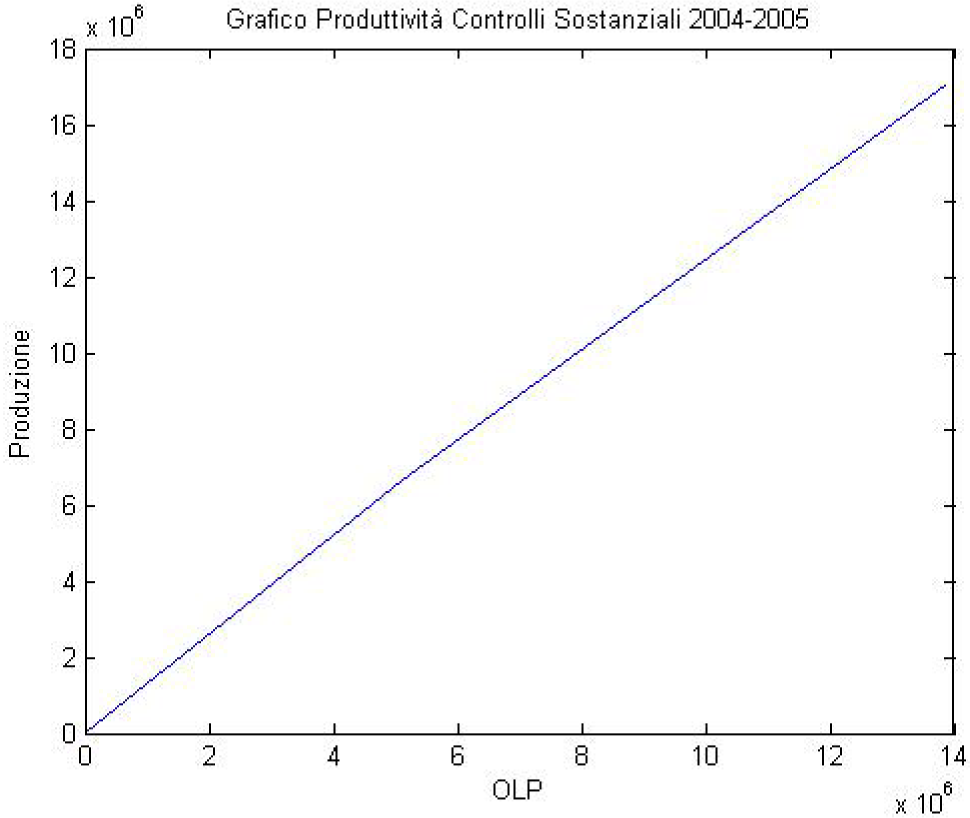


Grafico Produttività Controlli Sostanziali 2004-2005
x 10^6
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Produzione
0
2
4
6
8
10
12
14
OLP
x 10^6

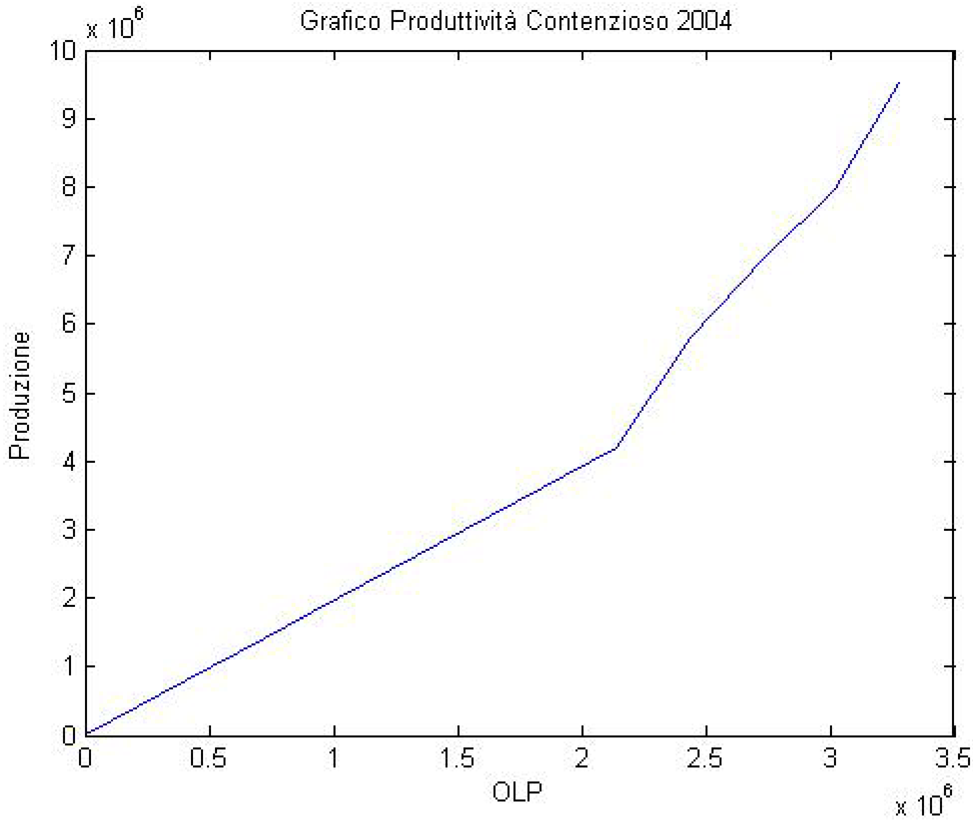


Grafico Produttività Contenzioso 2004
x 10^6
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Produzione
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
OLP
x 10^6

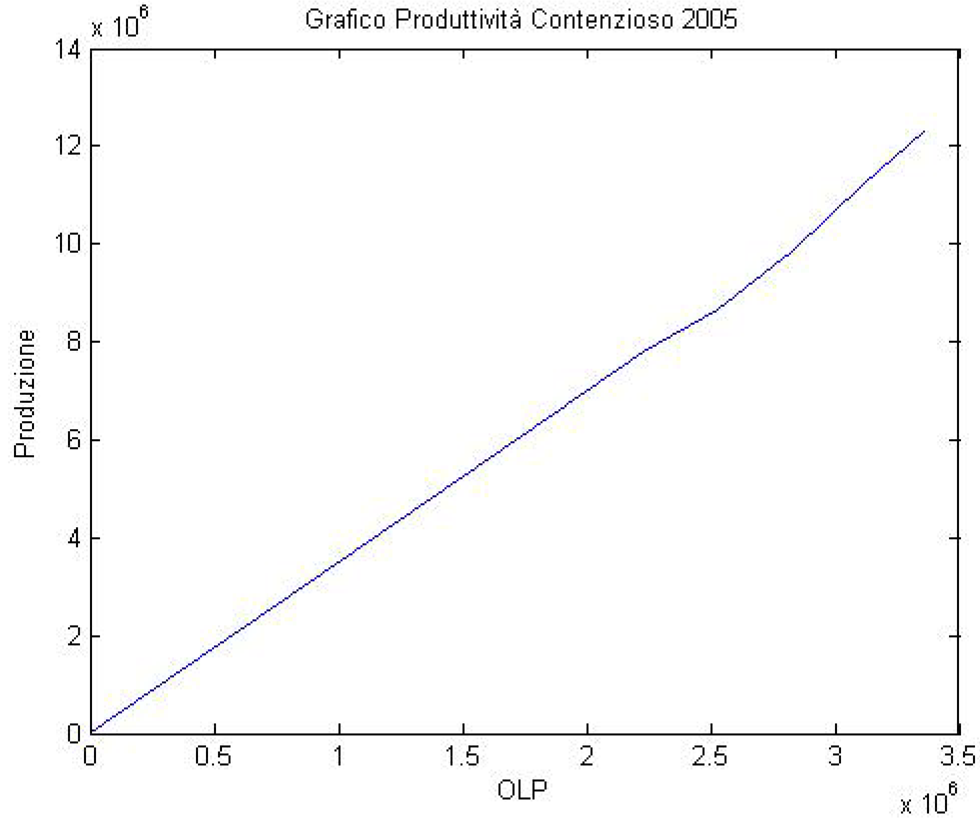


Grafico Produttività Contenzioso 2005
x 10^6
14
12
10
8
6
4
2
0
Produzione
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
OLP
x 10^6

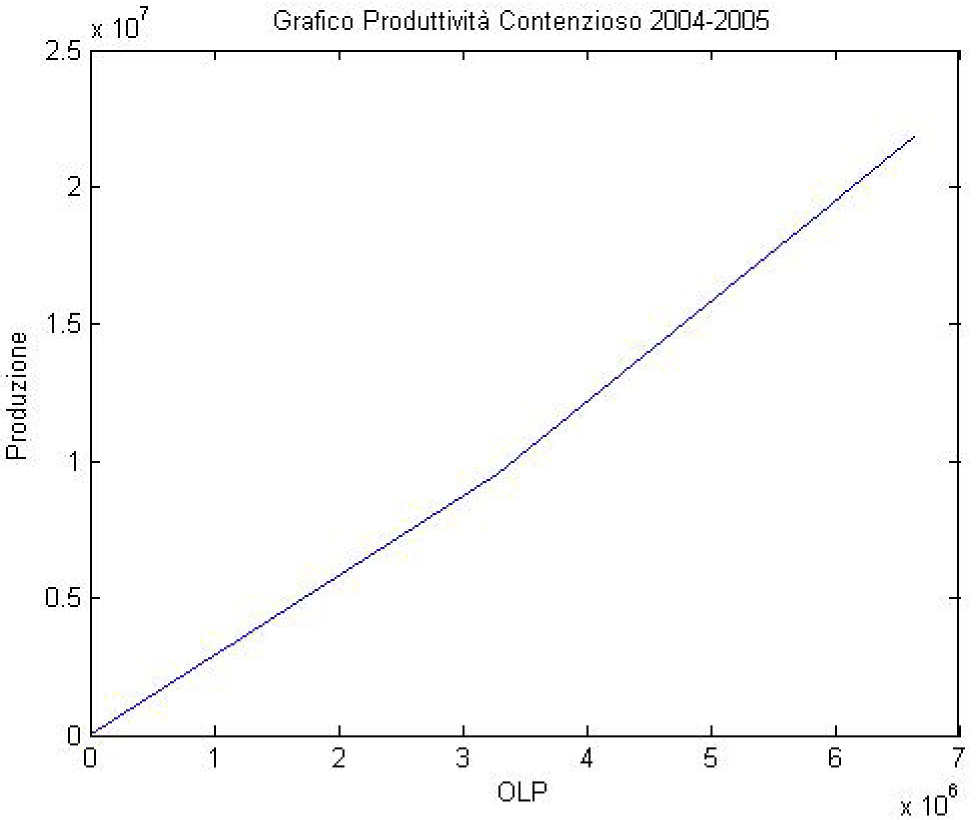


Grafico Produttività Contenzioso 2004-2005
x 10^7
2.5
2
1.5
1
0.5
0
Produzione
0
1
2
3
4
5
6
7
OLP
x 10^6

Appendice 3

Tabella relativa al problema di trasformare gli obiettivi della Convenzione 2006-08 in ore equivalenti:

Indicatore di risultato	Descrizione	Elemento richiesto	Elemento richiesto	Risultato atteso	Risultato atteso in termini di OE	Peso indicatore
Tasso di positività dell'attività di controllo sostanziale	OE totali controlli sostanziali esito positivo / OE totali controlli sostanziali eseguiti al netto delle attività riferite alla PF e adeguamento anni 2003 - 2004	OE totali controlli sostanziali eseguiti al netto delle attività riferite alla PF e adeguamento anni 2003 - 2004		87%		18
Numero degli accessi brevi equivalenti				250.000	250.000	12
Numero dei controlli fiscali ponderati	Numero calcolato sulla base delle OE ai controlli fiscali (controlli sostanziali compresa PF e adeguamento anni 2003 - 2004, accessi brevi e verifiche) rapportate ad un TUM pari a 16 ore			960.000	15.360.000	20
Indice di smaltimento dei processi verbali di constatazione relativi ad attività di verifica giacenti all'1/7/2004	Percentuale calcolata sulle annualità residue (relative a verifiche dell'Agenzia e a verifiche generali della GdF) sottoposte a verifica fino al 30 giugno 2004 utilizzarìte ai fini del controllo sostanziale	Numero attività verifica giacenti	TUM smaltimento processo	80%		18
Numero interventi effettuati nei confronti degli intermediari della riscossione		TUM interventi effettuati nei confronti degli intermediari della riscossione = 15		400	6.000	4

Numero di costituzioni in giudizio in C.T.P. pari almeno al numero dei ricorsi notificati dai contribuenti nell'anno	L'indicatore comprende anche l'attività di smaltimento dell'arretrato relativo alle costituzioni in giudizio	TUM costituzioni in giudizio in C.T.P. = 8	Numero dei ricorsi notificati dai contribuenti nell'anno	102%		10
Percentuale di utilizzo delle somme stanziate per i rimborsi	Somme erogate a titolo di rimborso / Stanziamento di cassa sul capitolo di bilancio	?	?	100%		8
Risposte rese nei termini alle istanze di interpello	Percentuale di risposte alle istanze di interpello rese entro 120 gg	Numero istanze di interpello	TUM risposta istanza di interpello entro 120 gg	100%		8
Pareri resi rispetto alle richieste di consulenza pervenute da associazioni di categoria, ordini professionali e uffici della A.F.		Numero richieste di consulenza pervenute da associazioni di categoria, ordini professionali e uffici della A.F.	TUM parere reso	80%		3
Percentuale di utilizzo dei servizi telematici	descrizione	?	?	100%		12
Percentuale di contribuenti che hanno prenotato un appuntamento serviti entro 10 min dall'orario fissato		Numero contribuenti che hanno prenotato un appuntamento	TUM servizio entro 10 min dall'orario fissato	90%		10
Percentuale degli atti privati (compresi i contratti di locazione) registrati e trasmessi ad A.T. entro 5 gg lavorativi		Numero atti privati (compresi i contratti di locazione) pervenuti	TUM registrazione e trasmissione degli atti privati ad A.T. entro 5 gg lavorativi	91%		3
Numero di partecipanti ad iniziative formative connesse all'avvio della riforma fiscale e di carattere monografico e/o specialistico di		? TUM partecipante corso		14.700		4

importanza strategica						
Numero di uffici certificati		? TUM certificazione ufficio		180 (di cui i 2/3 su entrambe la aree)		4
Quota di mercato degli strumenti on line utilizzati da parte degli utenti rispetto al totale dei portali del MEF	descrizione	?	?	50%		2
Indice sintetico ponderato del grado di raggiungimento dei risultati attesi dal piano degli investimenti	L'indice è calcolato sulla base del grado di raggiungimento degli obiettivi dei singoli progetti di investimento. Il risultato atteso corrisponde al raggiungimento del 100% dell'obiettivo per almeno l'85% dei progetti di investimento.	?	?	85%		2

Riferimenti bibliografici

Agenzia delle Entrate, Convenzione triennale per gli esercizi 2006 – 2008.

Baker G. P. (1992) "Incentive Contracts and Performance Measures", The Journal of Political Economy, Vol. 100, No 3 (Jun 1992), 598-614.

Cutaia M., Pisani S. (2002) "Indicatori sintetici di produttività dei fattori Metodologia e confronto 2000-2001", Documenti di lavoro dell'Ufficio Studi.

Cutaia M., Pisani S. (2004), "Output, input and incentives measurement for non-market activity. The case of Italian Revenue Agency", documenti di lavoro dell'Ufficio Studi dell'Agenzia delle Entrate.

Dongiovanni S., Alborino N. (2005), "Proposta per la definizione di strumenti metodologici atti a definire indicatori di efficienza", documenti di lavoro dell'Agenzia delle Entrate.

Eurostat (1996) "Sistema Europeo dei Conti" SEC95, Lussemburgo.

Griliches Zvi (eds.1992) "Output measurement in the service sector", The University of Chicago Press, Chicago.

Holmstrom B., Milgrom P. (1991) "Multitask Principal-Agent Analysis: Incentive Contracts, Asset Ownership and Job Design", Journal of Law, Economics and Organization, 7 (Special Issue), 24-52.

Holmstrom B. (1982) "Moral Hazard in Teams", The Bell Journal of Economics, Vol.13, n. 2 (Autumn, 1982), 324-340.

Ittner C. D., Larcker D. F. (2002) "Determinants of Performance Measures in Worker Incentive Plans", Journal of Labor Economics, Vol. 20, n. 2, pt. 2.

Jorgenson D. W., Fraumeni B. M. (1992) "The output of education sector", in Griliches Zvi (eds.1992) "Output measurement in the service sector", The University of Chicago Press, Chicago.

Maskin E., Tirole J. (2004) "The Politician and the Judge: Accountability in Government", American Economic Review, American Economic Association, vol. 94(4), pages 1034-1054, September.

Murphy K. J. (2000) "Performance Standards in Incentive Contracts", Journal of Accounting and Economics, Vol. 30 (3).

Murray R. (1992) "Measuring Public Sector Output: the Swedish Report", in Griliches Zvi (eds.1992) "Output measurement in the service sector", The University of Chicago Press, Chicago.

Pang J. S., Facchinei F. (2003) "Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems", Springer-Verlag, New York, Volumes I and II.

Porter M. (1985) "Competitive Advantage: creating and sustaining superior Performance", Free Press, New York.

Su C. L., Judd K. L. (2005) "Computation of Moral-Hazard Problems"

Varian H. R. (1996) "Intermediate Microeconomics. A Modern Approach", W.W. Norton & Company, Inc., New York – London.